ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Advanced Geometry B
Università dell'Insubria, a.a. 2016/17
Consegna: 11 maggio

1. Sia S un anello graduato. Un elemento a di S si dice omogeneo di grado d se e solo se $a \in S_d$.
   (a) Dimostrare che un ideale omogeneo I è primo se e solo se per ogni coppia di elementi omogenei $a, b \in S$ tali che $ab \in I$, allora a o b appartengono ad I.
   (b) Dimostrare che il radicale di un ideale omogeneo è un ideale omogeneo.

2. Sia k un campo algebricamente chiuso. Sia $V = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una varietà affine. Sia $\mathbb{P}^n_k$ lo spazio proiettivo, con coordinate omogenee $[x_0 : \ldots : x_n]$. Sia $\varphi_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{A}^n_k$ l'omeomorfismo $\varphi_0([x_0 : \ldots : x_n]) = (x_1/x_0, \ldots x_n/x_0) \in \mathbb{A}^n_k$. Sia $\widetilde{I}$ l'ideale omogeneo in $k[x_0, \ldots, x_n]$ generato dagli omogeneizzati degli elementi di I (dove ricordiamo che dato $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ il suo omogeneizzato è $F(x_0, \ldots, x_n) := x_0^{\deg f} f(x_1/x_0, \ldots x_n/x_0))$.

   Dimostrare che $V(\widetilde{I}) \subseteq \mathbb{P}^n_k$ è la chiusura di $\varphi^{-1}(V(I))$ rispetto alla topologia di Zariski di $\mathbb{P}^n_k$.

   Nell'esercizio 5 vediamo che $\widetilde{I}$ non è necessariamente generato dagli omogeneizzati dei generatori di I.

3. Dimostrare che un polinomio omogeneo in due variabili su un campo algebricamente chiuso k si scompone sempre in fattori lineari omogenei (sugg: deomogeneizzare il polinomio). Descrivere la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^1_k$.

4. Consideriamo la mappa $\varphi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^2_k$ così definita: $\varphi([t_0 : t_1]) = [t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2]$. Sia $Y := \varphi(\mathbb{P}^1_k) \subset \mathbb{P}^2_k$.
   (a) Dimostrare che Y è una varietà proiettiva.
   (b) Dimostrare che $\mathbb{P}^1_k$ e Y sono isomorfe.
   (c) Calcolare gli anelli delle coordinate omogenee $S(\mathbb{P}^1_k)$ e $S(Y)$ e verificare che non sono ismomorfi.

5. Consideriamo la mappa $\varphi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$ così definita: $\varphi([t_0 : t_1]) = [t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3]$.
   (a) Dimostrare che l'immagine $W := \varphi(\mathbb{P}^1_k)$ è una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^3_k$;
   (b) trovare dei generatori per W;
   (c) verificare che W non è un'intersezione completa (cioè che non è l'intersezione di due ipersuperfici in $\mathbb{P}^3_k$, ovvero che l'ideale $I(W)$ non può essere generato da due elementi).
   (d) Si consideri la cubica twistata dell'esercizio 6 del foglio 1. $C \subset \mathbb{A}^3_k$. Identificando $\mathbb{A}^3_k$ con l'aperto affine $\mathcal{U}_0$ di $\mathbb{P}^3_k$, verificate che $W = \overline{C}$, cioè W è la chiusura proiettiva di C in $\mathbb{P}^3_k$. Si osservi che i proiettivizzati dei generatori di $I(C)$ che avevamo trovato non sono generatori per l'ideale omogeneo $I(W)$.