Esame scritto di Geometria I

05/03/2013

Linee guida:

(a) Risolvere il maggior numero dei seguenti esercizi. Ogni risposta deve essere appropriatamente giustificata.

(b) Non è necessario svolgere tutti i punti di uno stesso esercizio. Inoltre, ove possibile, e consentito usare senza dimostrazione una delle domande dell'esercizio per rispondere a quelle successive.

Esercizio 1 *Si considerino i sottoinsiemi di* $\mathbb{N}$ *dati da*

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad E_2 = \{\textit{numeri pari}\}.$$

1. *Dotato* $\mathbb{N}$ *della topologia cofinita* τ_{cof}*, stabilire se* E_1 *ed* E_2 *sono aperti, chiusi e trovare parti interne, frontiere, punti limite e chiusura.*

2. *Si consideri ora* $X = E_1$ *dotato della topologia*

   $$\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}\}$$

   Posto $E = \{1, 2, 3\}$ *stabilire se è aperto, se è chiuso e trovare parte interna, frontiera, punti limite e chiusura.*

Esercizio 2 *Siano* $\mathbb{R}_{\text{scs}} = (\mathbb{R}, \tau_{\text{scs}})$ *e* $\mathbb{R}_{\text{Eucl}} = (\mathbb{R}, \tau_{\text{Euc}})$ *dove* τ_{Euc} *è la topologia Euclidea mentre* τ_{scs} *è la topologia della semicontinuità superiore, costituita da* $\emptyset$*,* $\mathbb{R}$ *e dalle semirette* $(-\infty, a)$ *al variare di* $a \in \mathbb{R}$*.*

1. *Si provi che un insieme compatto* $K \subseteq \mathbb{R}_{\text{scs}}$ *è superiormente limitato e che* $\sup K \in K$*.*

2. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}_{\text{scs}}$ *una funzione continua sullo spazio compatto* X*. Si dimostri che* f *assume il suo massimo.*

3. *Determinare tutte e sole le funzioni continue* $f : \mathbb{R}_{\text{scs}} \to \mathbb{R}_{\text{Euc}}$

Esercizio 3 *Sia* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*, dotato della topologia Euclidea.*

1. *Si dimostri che* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^2$ *non sono omeomorfi.*

2. *Si dimostri che gli intervalli* $[a, b]$ *e* $[a, b)$ *di* $\mathbb{R}$ *non sono omeomorfi.*

3. *Posto* $\mathbf{x}_0 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\mathbf{x}_1 = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ *punti fissati si trovino il numero delle componenti connesse dei seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^2$*.*

   (a) $X_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < 1 \text{ oppure } d_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) < 1\right\}$
   (b) $X_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq 1 \text{ oppure } d_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \leq 1\right\}$

Esercizio 4 *Suddividere i seguenti spazi topologici in classi di omeomorfismo (dove non è specificato, le topologie sono da intendere quelle standard):*

- $X_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$
- $X_2 = \mathbb{R}$
- $X_3 = \mathbb{S}^3$
- $X_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\right\}$
- $X_5 = (\mathbb{R}, \tau_{\text{cof}})$
- $X_6 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.