Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 6 ottobre 2014

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un'applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali è chiusa.
   (b) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (c) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (d) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

2. Sia $\{a_n\}$ una successione in uno spazio topologico X. Dimostrare che se X è di Hausdorff e a_n è convergente allora il suo limite è unico. Fare un esempio di una successione convergente in uno spazio topologico X che non ha un unico limite.

3. Uno spazio topologico si dice *totalmente sconnesso* se presi comunque due punti $x, y \in X$, esistono due aperti disgiunti $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tali che $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ e $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Ovviamente uno spazio totalmente sconnesso non è connesso.
   (a) Fare un esempio di uno spazio sconnesso non totalmente sconnesso.
   (b) L'insieme dei razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea è totalmente sconnesso?
   (c) Si dimostri che la retta di Sorgenfry $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ è totalmente sconnessa.
   (d) Si dimostri che le componenti connesse di uno spazio topologico X totalmente sconnesso sono i sottoinsiemi costituiti da un solo punto.

4. Calcolare il gruppo fondamentale di:

$$X_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$$

$$X_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$X_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0), (1,0,0)\}$$