

# Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 17 febbraio 2014

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero fate la dimostrazione, se falso esibite un controesempio]
  - (a) Uno spazio contraibile è connesso.
  - (b) Tutti gli spazi con la topologia concreta sono connessi per archi.
  - (c) Tutti gli spazi con la topologia concreta sono connessi per archi.
  - (d) Esiste uno spazio con la topologia concreta connesso per archi.
  
2. Dati due sottinsiemi  $S_1$  e  $S_2$  di uno spazio topologico  $X$ , è vero che  $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$  in  $X \times X$ ?
  
3. Sia  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  con la topologia indotta da quella euclidea.
  - (a) Dimostrare che lo spazio quoziente  $X/\{0, 1\}$  è omeomorfo a
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$
  - (b) Dimostrare che  $X/\{0, 1/2, 1\}$  è omeomorfo al bouquet di due circonferenze.
  - (c) Dimostrare che  $X/Y$  dove  $Y = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$  non è omeomorfo al bouquet di  $n$  circonferenze.
  
4. Suddividere in classi di omeomorfismo e di omotopia i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ :
  - (a)  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ;
  - (b)  $S^2$ ;
  - (c)  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 1\}$ ;
  - (d)  $S^1 \times [0, 1]$ ;
  - (e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .