Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 16 settembre 2014

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se nè f nè g sono continue g la loro composizione $g \circ f$ non è continua.
   (b) L'inversa di una applicazione biiettiva non continua non è continua.
   (c) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se f non è continua e g è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.

2. Sia X il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (con la toplogia euclidea):
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - y + 1)(x^2 + y - 1) = 0\}.$$
   (a) X è connesso? È compatto? è T2?
   (b) Il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus X$ è compatto? è T2? È connesso? Se non lo è, quali sono le sue componenti connesse?
   (c) Si consideri la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$:
$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ oppure } |x| \geq 1.$$
   Sia $Y := X/\sim$. Lo spazio Y è connesso? È compatto? è T2?
   (d) Stesse domande con la relazione $\approx$
$$(x, y) \approx (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ oppure } |x| > 1.$$

3. Sia $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea.
   (a) Dimostrare che lo spazio quoziente $X/\{0, 1\}$ è omeomorfo a
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$
   (b) Dimostrare che $X/\{0, 1/2, 1\}$ è omeomorfo al bouquet di due circonferenze.
   (c) Dimostrare che X/Y dove $Y = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non è omeomorfo al bouquet di n circonferenze.

4. Calcolare il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$: