Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 27 gennaio 2014

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) In uno spazio topologico arbitrario ogni sottoinsieme coincide con la parte interna della sua chiusura.
   (b) In uno spazio topologico arbitrario ogni aperto coincide con la parte interna della sua chiusura.
   (c) In uno spazio topologico arbitrario ogni aperto è contenuto nella parte interna della sua chiusura.
   (d) Uno spazio topologico è dotato della topologia discreta se e solo se ogni suo sottoinsieme coincide con la parte interna della sua chiusura.

2. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Sia $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\} \subset X \times Y$.
   (a) Dimostrare che il grafico Γ_f è omeomorfo a X.
   (b) Provare che se Y è di Hausdorff allora il grafico è chiuso nel prodotto.
   (c) Fare un esempio di una applicazione continua tra due spazi $f\colon X \to Y$ tale che il grafico non sia chiuso nel prodotto $X \times Y$.

3. Sia $X = [0, 1]$ e $\sim$ la relazione di equivalenza $x \sim y$ se $x = y$ o se $x > 0$ e $y > 0$. Descrivere lo spazio quoziente $X/\sim$. È T2? È compatto, connesso?

4. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (con la topologia euclidea) così definito:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1)(x^2 + z^2)z = 0\}.$$

   (a) Si dimostri che X è semplicemente connesso.
   (b) Dando per noto che il bouquet di n sfere non è omotopicamente equivalente al bouquet di m sfere per $m \neq n$, stabilire se X è omotopicamente equivalente alla sfera S^2.