# Geometria I

**CdL in Matematica, Università dell'Insubria**

**Prova scritta del 17 febbraio 2014**

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se nè $f$ nè $g$ sono continue $g$ la loro composizione $g \circ f$ non è continua.
   (b) L'inversa di una applicazione biiettiva non continua non è continua.
   (c) Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se $f$ non è continua e $g$ è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.

2. Sia $X$ il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (con la toplogia euclidea):
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - y + 1)(x^2 + y - 1) = 0\}.$$
   (a) $X$ è connesso? È compatto? è T2?
   (b) Il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus X$ è compatto? è T2? È connesso? Se non lo è, quali sono le sue componenti connesse?
   (c) Si consideri la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$:
$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ oppure } |x| \geq 1 \text{ e } |x'| \geq 1.$$
   Sia $Y := X/\sim$. Lo spazio $Y$ è connesso? È compatto? è T2?
   (d) Stesse domande con la relazione $\approx$
$$(x, y) \approx (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ oppure } |x| > 1 \text{ e } |x'| > 1.$$

3. Dividere i seguenti spazi in classi di omeomorfismo e di equivalenza omotopica.
   (a) Lo spazio $X$ dell'esercizio precedente;
   (b) Lo spazio $Y$ del punto (c) dell'esercizio precedente;
   (c) $S^1$
   (d) $S^2$
   (e) Il toro $T$ meno un punto.

4. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (con la topologia euclidea) così definito:
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 4)(z^2 - 1) = 0\}.$$
   Si dimostri che $X$ è semplicemente connesso.