Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2013/2014

Qui ci sono gli argomenti delle lezioni e delle esercitazioni svolte da me, non delle esercitazioni svolte dagli esercitatori.

Lezione 1. Martedì 1 ottobre (2 ore).

Introduzione del corso. Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$, metrica discreta), applicazioni continue tra spazi metrici. Aperti negli spazi metrici e loro proprietà. Teorema: una funzione tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti è aperta.

Esercitazione 2: martedì 1 ottobre (2 ore).

Esercizi sugli spazi metrici.

Lezione 2: mercoledì 2 ottobre (2 ore):

Definizione di spazio topologico. Primi esempi: 1) topologie metrizzabili; 2) topologia discreta (verifica che è indotta dalla metrica discreta); 3) Topologia concreta; 4) Topologia della semicontinuità superiore su $\mathbb{R}$; 5) Topologia cofinita. Esercizi: la topologia concreta su un insieme con più di due elementi non è metrizzabile; la topologia cofinita su un insieme infinito non è metrizzabile; la topologia della semicontinuità superiore su $\mathbb{R}$ non è metrizzabile. Topologie su insiemi finiti con pochi elementi. Topologie confrontabili, più o meno fini.

Lezione 3. Martedì 8 ottobre (2 ore).

Topologie generate da una famlgia di sottoinsiemi. *Base* di una topologia Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta); Teorema della base (quando una famiglia di aperti puo' essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti). Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$. Verifica che la topologia $\mathcal{T}_s$ è strettamente più fine di quella euclidea $\mathcal{T}_e$.

Parte interna S°, chiusura $\overline{S}$, frontiera di un sottoinsieme S di uno spazio topologico X. Definizioni ed esempi. Esercizi: $X \setminus (X \setminus S)^\circ = \overline{S}$; S è aperto se e solo se $S^\circ = S$, S è chiuso se e solo se $\overline{S} = S$.

Esercitazione 2. Martedì 8 ottobre (2 ore).

Comportamento di chiusura e parte interna rispetto a intersezione e unione, e controesempi.

L'insieme $\{(a, b), a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ è una base per $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}$. L'insieme $\{[a, b), a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ non è una base per $\mathcal{T}_s$ su $\mathbb{R}$.

Lezione 4. Mercoledì 9 ottobre (2 ore):

Definizione di sottospazio denso. Proprietà ed esempi. Esercizi: in uno spazio con la topologia concreta tutti i sottoinsiemi non vuoti sono densi; un uno spazio con la topologia cofinita i sottoinsiemi densi sono tutti e soli i sottoinsiemi di cardinalità infinita.

Definizione di intorno di un punto e di sistema fondamentale di intorni. Esempi.

Continuità negli spazi topologici. Definizione, esempi e prime propietà. Definizione di omeomorfismo. Verifica che dà una relazione di equivalenza.

Esercizi: i) le funzioni continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con la topologia dell semicontinuità inferiore $\mathcal{T}_-$ in dominio e codominio sono tutte e sole le funzioni monotone strettamente crescenti continue a destra (con la metrica euclidea) in ogni punto. ii) Le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$ sono le funzioni f tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ $f(y) \leq f(x) + \epsilon$.

Lezione 5. Martedì 15 ottobre (2 ore).

Definizione di applicazioni aperte e chiuse. Lemma: se f è un'applicazione continua biiettiva e aperta/chiusa allora è un omeomorfismo.

Topologia indotta o topologia del sottospazio. Verifica che è la più piccola topologia che rende continua l'inclusione.

Esercizio: classificazione degli intervalli di $\mathbb{R}$ a meno di omeomorfismo: cominciamo a porre la questione, e a vedere che $(a, b) \sim (0, 1)$ per ogni $a < b$ (anche $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$).

Verifica che chiusura e parte interna connutano con l'inclusione. Sottospazi discreti: definizione ed esempi.

Esercitazione 3. Martedì 15 ottobre (2 ore).

- $A \subseteq X$ sottoinsieme denso di uno spazio topologico. Per ogni $\mathcal{U} \subseteq X$ aperto $\mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U} \cap A}$.
- La controimmagine di un insieme denso tramite una funzione continua e aperta è densa.
- f continua se e solo se $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ per ogni sottoinsieme S del dominio.

Lezione 6: mercoledì 16 ottobre (2 ore):

L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiusa).

Definizione di immersione.

Sia f un'applicazione continua. Se f è chiusa/aperta ed iniettiva, allora f è una immersione chiusa/aperta.

Esercizio 3.39 del Manetti.

Definizione di *propriet à topologica*: una propriet à che dipende solo dalla classe di omeomorfismo du uno spazio topologico. Esempi: 1) essere metrizzabile è una propriet à topologca; essere limitato rispetto a una metrica *non* lo è.

Topologia prodotto: la meno fine che rende continue le proiezioni. Base canonica. Esempio: la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2$ indotta dalla topologia euclidea sulle due componenti è la topologia euclidea.

Teorema: Le proiezioni sono applicazioni aperte (ma non sempre chiuse). Inoltre per ogni $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ è omeomorfa a Y.

Lezione 7. Martedì 22 ottobre (2 ore).

Spazi di Hausdorff o T2. Metrizzabile $\Rightarrow$ Hausdorff. Negli sazi di Hausdorff gli insiemi finiti di punti sono chiusi. Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Teorema: uno spazio topologico X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto $X \times X$.

Altre proprietà di separazione: T0, T1, T3, T4 (notazioni del Manetti che sono diverse da quelle del Kosniowski!). Verifica che sono tutte proprietà topologiche.

Lezione 8: mercoledì 23 ottobre (2 ore):

Esercizi: Uno spazio metrizzabile è regolare (T3+T1); Uno spazio metrizzabile è normale (T4+T1).

Connessione. Definizione e definizioni equivalenti. Esempio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso.

Lemma: A aperto e chiuso di uno spazio topologico X. Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio connesso, allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Teorema: L'intervallo $[0, 1]$ è connesso con la topologia euclidea.

Teorema: L'immagine continua di un connesso è connessa. (Corollario: la connessione è una proprietà topologica).

Definizione di connessione per archi (cpa). Verifica che cpa $\Rightarrow$ connesso, ma non vale il viceversa (esempio della pulce e il pettine).

Lezione 9. Martedì 29 ottobre (2 ore).

Esercizio: sia $Y \subseteq X$ sottospazio connesso di uno spazio topologico. Se $W \subseteq X$ è tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$, allora W è connesso. In particolare la chiusura di un sottospazio connesso è connessa.

Definizione di sottospazi convessi di $\mathbb{R}^n$. Osservazone: non è una proprietà topologica ma è utile perché convesso $\Rightarrow$ connesso.

Teorema: per un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti le seguenti proprietà: S è convesso (cioè è un intervallo); S è connesso; S è connesso per archi.

Applicazioni: $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $[0,1] \not\sim [0,1)$; $[0,1] \not\sim (0,1)$.

Teorema: $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$. Corollario: gli aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi agli aperti di $\mathbb{R}^n$.

Teorema $f\colon X \longrightarrow Y$ continua e suriettiva, Y connesso, per ogni $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ sia connesso, e f sia aperta oppure chiusa. Allora X è connesso. Corollario: il prodotto di spazi connessi è connesso.

Lemmi: 1) Se $A, B \subseteq X$ sono connessi e $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso. 2) Se $\{Z_i\}$ è una famiglia di connessi tali che esiste un $x \in Z_i$ per ogni i, allora la loro unione è connessa.

Lezione 10: mercoledì 30 ottobre (2 ore):

Definizione di componente connessa. Proprietà: 1) ogni componente connessa è chiusa. 2) Se ogni punto di X possiede un intorno connesso allora sono anche aperte. 3) Le componenti connesse formano una partizione di X. 4) Il numero di componenti connesse è un invariante topologico.

Ricoprimenti. Definizioni ed esempi. Ricoprimenti aperti. definizione di spazi compatti. Esempi: $\mathbb{R}^n$ non è compatto. Uno spazio finito è sempre compatto. Uno spazio discreto è copatto se e solo se è finito. Uno spazio con la topologia concreta è sempre compatto.

Teorema: immagine tramite funzione continua di un compatto è compatta. Corollario: la compattezza è una proprietà topologica.

Teorema: $[0,1]$ è compatto.

Lezione 11. Martedì 5 novembre (2 ore).

Proposizione: chiuso in un compatto è compatto. Unione finita di compatti è compatta. Corollario: un sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Corollario: ogni funzione continua da un comaptto ad $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo.

Teorema: Sia $f\colon X \to Y$ chiusa. Se Y è compatto e $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$ allora X è compatto.

Teorema di Wallace (si veda il Manetti, 4.5) e sue conseguenze: Teo1: Compatto in T2 $\Rightarrow$ compatto. Teo2: siano X e Y spazi topologici, sia X compatto. Allora la proiezione su Y è compatta. Teo3: prodotto finito di compatti è compatto.

Lezione 12: mercoledì 6 novembre (2 ore):

Corollari: 1) un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. 2) Una funzione continua da un compatto a un T2 è chiusa.

Assiomi di numerabilità per spazi topologici. Definizione di spazio 2-numerabile. Esempi. dfinizione di spazio separabile.

Lemma 1: ogni spazio 2-numerabile è separabile. Lemma 2: uno spazio metrizzabile separabile è 2-numerabile.

Teorema di Lindeloff: in uno spazio 2-numerabile ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.

Definizione di spazio 1-numerabile. Osservazioni: 2-numerabile $\Rightarrow$ 1-numerabile. Gli spazi metrici sono 1-numerabili.

Esempio importante: La retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ è 1-numerabile, separabile ma non è 2-numerabile. Dunque per il Lemma 2 non è metrizzabile.

Lezione 13. Martedì 12 novembre (2 ore).

Definizione di successione in uno spazio topologico. Definizione di punto di accumulazione per una successione e per un sottoinsieme, e confronto tra le due nozioni. Definizione di sottosuccessione. Lemma: se una successione ammette una sottosuccessione cnvergente a p, allora p è un punto di accumulazione per la successione.

Proposizione: sia X spazio 1-numerabile. $S \subseteq X$ un sottoinsieme. Dato $x \in X$ sono equivalenti: (1) esiste una successione in S che converge a x; (2) x è un punto di accumulazione per una successione a valori in S; (3) $x \in \overline{S}$.

Lemma: in uno spazio topologico compatto ogni successione possiede punti di accumulazione.

Definizione di compattezza per successioni.

Lemma: uno spazio 1-numerabile è compatto per successioni se e solo se ogni successione possiede punti di accumulazione.

Proposizione: X 2-numerabile. Allora vale che X è compatto se e solo se è compatto epr successioni.

Spazi metrici e compattezza: definizione di successione di Cauchy. Verifica che una successione di Cauchy è convergente se e solo se possiede punti di accumulazione. Definizione di spazio metrico completo, e di spazio metrico totalmente limitato.

Teorema: Per uno spazi metrico X sono equivalenti: (1) X è compatto; (2) Ogni successione in X possiede punti di accumulazione; (3) X è compatto per successioni; (4) X è compatto e totalmente limitato. Inoltre se valgono queste condizioni, X è 2-numerabile. [di questo risultato abbiamo visto solo che totalmente limitato $\Rightarrow$ 2-numerabile].

Lezione 14. Mercoledì 13 novembre (2 ore):

Quozienti topologici. Definizione di topologia quoziente: topologia $f_*\mathcal{T}_X$ indotta da una mappa suriettiva $f\colon X \longrightarrow Y$. Primi esempi. Esercizi: (1) la topologia quoziente indotta su X dalla proiezione sul primo fattore dallo spazio prodotto $X \times Y$ è la topologia di X. (2) Sia $f\colon [0,1] \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la mappa $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Allora $f_*\mathcal{T}_{e|[0,1]} = \mathcal{T}_{e|S^1}$ (in latre parole il quoziente di $[0,1]$ rispetto a questa applicazione f è S^1).

Proposizione: se $f\colon X \longrightarrow Y$ è una mappa tra spazi topologici continua suriettiva e aperta/chiusa, allora Y ha la topologia quoziente.

Osservazioni insiemistiche: Dati sue *insiemi* X e Y, e una applicazione suriettiva $f\colon X \longrightarrow Y$, possiamo definire una relazione di equivalenza su X: $x \sim_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Questa relazione è tale che $X/\sim$ è in corrispondenza biunivoca con Y. Inoltre se considero una applicazione $g\colon X \longrightarrow Z$, qaundo questa "passa al quoziente", cioè esiste $\overline{g}\colon Y \longrightarrow Z$ Tale che $\overline{g} \circ f = g$? Questo avviene se e solo se g è costante sulle fibre di f.

Teorema (proprietà fondamentale della topologia quoziente, referenza Manetti Lemma 5.5): Sia X uno spazio topologico e $f\colon X \longrightarrow Y$ una applicazione suriettiva tale che Y ha la topologia quoziente rispetto ad f. Sia $g\colon X \longrightarrow Z$ una applicazione continua. Esiste una applicazione continua $\overline{g}\colon Y \longrightarrow Z$ tale che $\overline{g} \circ f = g$ se e solo se

g è costante sulle fibre di f. Corollario (proprietà universale del quoziente secondo il Kosniowski) Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ come sopra. Ogni $h\colon Y \longrightarrow Z$ è continua se e solo se $h \circ f$ è continua.

Lezione 15. Martedì 19 novembre (2 ore).

Definizione di contrazione di un sottoinsieme S ad un punto X/S. Esempi: (i) $\mathbb{R}/(0,1)$ non è T2 nè T1. (ii) Sia X T2, e sia $K \subset X$ compatto. Allora X/K è T2. (iii) Una mappa di contrazione a un punto $\pi X \to X/S$ è aperta/chiusa se e solo se S è aperto/chiuso in X. (iv) Esercizio 5.7 del Manetti. (v) Domostrazone che la contrazione a un punto della base di un cilindro circolare è omeomorfa al disco: $(S^1 \times [0,1])/(S^1 \times \{0\}) \sim D^2$.

Classe importante di spazi quozienti: spazi ottenuti per identificazione di figure piane. Esempi: cilindro, nastro di Möbius, toro T^2.

Lezione 16. Mercoledì 20 novembre (2 ore):

Superfici di rotazione, e in genere figure ottenute per rotazione di figure piane in $\mathbb{R}^3$. Verifica che se $F \subseteq \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è una figura piana che non interseca l'asse z allora il solido di rotazione che ottengo ruotandolo intorno all'asse z è omeomorfo a $F \times S^1$.

Quozienti per gruppi di omoeomorfismi (qui notazioni del Manetti cap. 5). Sia X uno spazio topologico. L'insieme

$$Omeo(X) := \{\varphi\colon X \to X,\ \varphi \text{ omeomorfismo}\}$$

è un gruppo con elemento neutro l'identità. Esempio: il gruppo delle applicazioni lineari invertibili $GL(n,\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $Omeo(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$.

Sia $G < Omeo(X)$. Definizione di spazio quoziente X/G per l'azione di G su X. Definizione di orbite. Esempio: mappa antipodale $\sigma(\underline{x}) = -\underline{x}$ su S^n: è un omeomorfismo di ordine 2 (involuzione). Verifica che $S^1/\langle\sigma\rangle \sim S^1$.

Confronto con la definizione del Kosniowski: se G è un gruppo che agisce su uno spazio topologico X secondo la definizione di K., allora c'è un omomorfismo di gruppi

$$\theta\colon G \longrightarrow Omeo(X)$$

tale che X/G secondo K è omeomorfo a $X/\theta(G)$ secondo M.

Teorema: $G < Omeo(X)$. La proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X/G$ è una applicazione aperta.

Defiizione di stabilizzatore G_x di un punto $x \in X$. Verifica che l'orbita di $x \in X$ è in corrispondenza biunivoca con i laterali sinistri di G_x in G. Esempi.

Lezione 17. Martedì 26 novembre (2 ore).

Definizione insiemistica degli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n(K)$ su un campo K qualsiasi. Spazi proiettivi reali e complessi. Definizione ed esempi: Lo spazio $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come spazio di identificazione di disco piano. Verifica che lo spazio $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfo a S^2: costruzione di interesse separato: proiezione stereografica di $S^n \setminus \{N\}$ su $\mathbb{R}^n$.

Proposizione: Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è il quoziente di S^n per l'azione dell'involuzione antipodale. Corollario: gli spazo proiettivi reali $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sono comapatti, connessi e di Hausdorff.

Lezione 18. Mercoledì 27 novembre (2 ore).

Proposizione: lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è il quoziente di S^n rispetto all'identificazione antipodale. Questa non è l'azione di un gruppo finito , infatti tutte le fibre sono omeomorfe a S^1. Proposizione: gli spazi proiettivi complessi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono comapatti, connessi e di Hausdorff.

Verifica che i sottoinsiemi $\mathcal{U}_i$ della forma $\{[\underline{x}] \in \mathbb{P}^n(K) | x_i \neq 0\}$, con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, sono aperti in $\mathbb{P}^n(K)$ e sono omeomorfi a K^n. Esempi.

Lezione 19. Martedì 3 dicembre (2 ore)

Una curva continua può riempire il piano: la curva di Peano nella formalizzazione di Hilbert (referenza: Munkres, Topology).

Introduzione alla Topologia Algebrica. Definizione di spazio topologico localmente connesso. Esempio di spazi connessi ma non loc. connessi: la pulce e il pettine e Esercizio 10.1 Manetti. Definizione di spazio localmente connesso per archi e di componenti connesse per archi. Definizione di $\pi_0(X) =$ insieme delle componenti connesse per archi di X.

Proposizione: se X è uno spazio localmente connesso per archi le sue componenti connesse per archi sono aperte, chiuse e coincidono con le componenti connesse.

Esercitazione 4. Martedì 3 dicembre 2013.

Definizione di bottiglia di Klein. Definizione di varietà topologiche: verifica che gli spazi proiettivi sono varietà topologiche.

Verifica diretta che S^2, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, il toro e la bottiglia di Klein sono superfici topologiche. Esercizio 5.12 Manetti.

Lezione 20. Mercoledì 4 dicembre (2 ore).

Definizione di omotopia tra funzioni continue. Esempi: tutte le funzioni continue tra uno spazio qualsiasi e un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ sono omotope. La mappa antipodale sulla sfera n-dimensionale $S^n \to S^n$ è omotopa all'identità se n è dispari.

Verifica che l'omotopia è una relazione di equivalenza sullo spazio delle funzioni continue tra due spazi X e Y, che indichiamo $\mathcal{C}(X, Y)$.

Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici. Esempi: Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Tutti i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$, per ogni n, sono omotopicamente equivalenti.

Definizione di spazio contraibile (o contrattile).

Lezione 21. Martedì 10 dicembre (2 ore).

Proposizione: uno spazio contraibile è connesso per archi. Oss: vedremo nelle prossime ore che invece S^1 è connesso per archi ma non contraibile.

Retrarri e retratti (forti e non) di deformazione. Definizioni (seguendo le notazioni del Kosniowski) ed esempi.

Proposizione: sia X spazio topologico e $Y \subset X$ un retratto di deformazione. Allora l'inclusione $i\colon Y \hookrightarrow X$ è una equivalenza omotopica. Esempi-esercizi: S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

Esercitazione 5. Martedì 10 dicembre (2 ore). Esercizio: In uno spazio T2 ogni retratto è chiuso.

Definizione astratta di prodotto wedge $\wedge$ di due spazi.

Verifica che $S^1 \wedge S^1$ è omeomorfo a $C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{R}^2$ dove C_1 è circonferenza unitaria con centro in $(-1, 0)$ e C_2 è circonferenza unitaria con centro in $(1, 0)$.

Verifica che $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ si retrae di deformazione forte su $S^1 \wedge S^1$.

Lezione 22. Mercoledì 11 dicembre (2 ore).

Definizione di Categoria, e di funtori tra categorie. Esempi. (referenza: Manetti 10.4).

Definizione di omotopia relativa a un sottospazio.

Prodotti di cammini. (notazione $\alpha \star \beta$). Definizione ed esempi. Cammino inverso ad un cammino α: $\overline{\alpha}(t) := \alpha(1 - t)$.

Equivalenza di cammini (notazione $\alpha \sim \beta$). Definizione ed esempi.

Prodotto sulle classi di equivalenza di cammini. Proprietà. Discussione su: cosa manca per farlo diventare un gruppo?

Lezione 23. Martedì 17 dicembre (2 ore).

Dato $x \in X$ chiamo ϵ_x il cammino costante in x. Sia α cammino tra x e y in uno spazio topologico X.

Lemma 1: Vale che $\alpha \star \epsilon_y \sim \epsilon_x \star \alpha \sim \alpha$.

Lemma 2: Vale che $\alpha \star \overline{\alpha} \sim \epsilon_x$ e $\overline{\alpha} \star \alpha \sim \epsilon_y$.

Definizione di gruppo fondamentale o gruppo di Poincarè $\pi_1(X, x_0)$. Verifica che è un gruppo.

Teorema: Se esiste un arco tra x ed y in X allora c'è un isomorfismo di gruppi tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$.

Corollario: in uno spazio cpa il gruppo fondamentale non dipende dal punto base scelto.

Osservazione: Quindi per uno spazio cpa X a volte scriveremo soltanto $\pi_1(X)$, ma attenzione che non c'è un isomorfismo *canonico*.

Esercizio: due archi γ e δ tra x e y danno luogo allo stesso isomorfismo tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ se e solo se $[\gamma \star \overline{\delta}]$ appartiene al centro di $\pi_1(X, x)$.

Gruppi fondamentali e mappe continue: l'omomorfismo indotto.

Esercitazione 6. Martedì 17 dicembre (2 ore).

Risoluzione degli Esercizi a casa II.

Lezione 24- Esercitazione 7. Mercoledì 18 dicembre (2 ore).

Fine risoluzione esercizi a casa II.

Funtorialità di π_1.

Esercizi Kosniowski 15.11 (e) e (g).

Lezione 25. Mercoledì 8 gennaio (2 ore).

Teorema: il gruppo fondamentale di un prodotto di spazi cpa è il prodotto diretto dei gruppi fondamentali.

Teorema: (15.12 Kosniowski): mappe omotope danno luogo ad omomorfismi corrispondenti (modulo un isomorfismo)

Teorema: Se X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti allora i gruppi fondamentali sono omeomorfi.

Osservazione: il gruppo fondamentale è dunque un invariante omotopico.

Esempio importante: gruppi topologici. Esempi: $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, $S^1 \subset \mathbb{C}$. Proposizione: (es. 15.18 (d) Kosniowski): il gruppo fondamentale di un gruppo topologico è abeliano.

Lezione 26. Martedì 14 gennaio (2 ore).

Il gruppo fondamentale della circonferenza. Prima parte. (referenza: Kosniowski capitolo 16).

Definizione (e verifica dell'esistenza di) intorni uniformemente rivestiti di S^1 rispetto alla mappa esponenziale.

Teorema di sollevamento delle mappe $f \colon I \to S^1$

Conseguenza: definizione della funzione "grado" di un cammino chiuso in S^1 puntato in 1.

Lezione 27. Mercoledì 15 gennaio (2 ore).

Il gruppo fondamentale della circonferenza. Seconda parte.

Verifica che la funzione grado è ben definita: Teorema di sollevamento delle omotopie in S^1.

Teorema: la funzione grado è un isomorfismo tra $\pi_1(S^1, 1)$ e $\mathbb{Z}$.

Corollario: il gruppo fondamentale del toro è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Corollario: il teorema fondamentale dell'algebra.

Colollario: Teorema del punto fisso di Brouer sul disco D^2.

Lezione 28. Martedì 21 gennaio (2 ore).

Prima parte teorema di Van Kampen (Manetti 11.4).

Teorema del numero di Lebesgue

Teorema (VK prima parte) Sia X spazio topologico e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due suoi aperti tali che $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Sia $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, e siano $i_*: \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \to \pi_*(X, x_0)$ e $j_*: \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \to \pi_*(X, x_0)$ gli omomorfismi indotti dalle inclusioni $i: \mathcal{U} \hookrightarrow X$ e $j: \mathcal{V} \hookrightarrow X$. Se $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sono connessi per archi, allora il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di i_* e j_*.

Oss: la connessione per archi di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è necessaria: controesempio di S^1.

Corollario: se X è unione di sue aperti semplicemente connessi tali che l'intersezione è connessa per archi, allora X è semplicemente connesso.

Corollario: la sfera S^n per $n \geq 2$ è semplicemente connessa.

Corollario: il complementare di un insieme finito di punti in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ è semplicemente connesso.

Corollario: gli soazi proiettivi complessi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono semplicemente connessi.

Esercitazione 7. Mercoledì 22 gennaio (2 ore).

Esercizio: Verifica che il toro bucato si retrae di deformazione forte sull'otto $S^1 \wedge S^1$.

Esercizio: Sia H un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbb{R}^n$. Vale che: (1) $\mathbb{R}^n \setminus H$ si retrae di deformazione forte su $H^\perp \setminus \{\underline{0}\}$, dove $H^\perp$ è l'ortogonale di H. (2) $H^\perp \setminus \{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{\underline{0}\}$. (3) $\mathbb{R}^n \setminus H$ è connesso per archi se $n \geq k+2$ e non è connesso se $n = k+1$. (4) Il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n \setminus H$ (per $n \geq k+2$) è $\mathbb{Z}$ se $n = k+2$, mentre è banale se $n > k+2$.

Esercizio: se X è un spazio topologico e Y è un suo retratto di deformazione (anche debole), se Y è connesso per archi X lo è. Se Y è un retratto forte di deformazione vale anche il viceversa.