Geometria Superiore: Superfici di Riemann

Lidia Stoppino

CdL in Matematica Magistrale, Università dell'Insubria, a.a. 2014/15

1. Miranda Esercizio II.4.J *(Curva di Fermat di grado d).*

2. (a) Dimostrare che X è una SdR compatta, non esiste una mappa olomorfa $F\colon X \to \mathbb{P}^1$ di grado $d > 1$ in $\mathbb{P}^1$ con un solo punto di ramificazione. $(*)$ Questa affermazione vale ancora se al posto di $\mathbb{P}^1$ prendo una SdR compatta di genere > 0?
   (b) Se X è una SdR compatta con una mappa olomorfa $F\colon X \to \mathbb{P}^1$ di grado $d > 1$ in $\mathbb{P}^1$ con *due* punti di ramificazione, allora i punti sono di ramificazione totale e $X \cong \mathbb{P}^1$. Fare un esempio di una tale mappa per ogni grado d.
   (c) Fare un esempio di una SdR con una mappa in $\mathbb{P}^1$ con esattamente tre punti di ramificazione totale. Esiste una tale mappa di grado pari?

3. Si consideri il luogo $X = Z(F)$ degli zeri del polinomio $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + yz^3$ in $\mathbb{P}^2$.
   (a) Verificare che X è una curva liscia proiettiva. Qual'è il suo genere?
   (b) Considerare le proiezioni su $\mathbb{P}^1$
   $$\pi_x\colon [x : y : z] \mapsto [y : z]$$
   e
   $$\pi_y\colon [x : y : z] \mapsto [x : z];$$
   verificare che sono ben definite su X, trovare il loro grado e i punti di ramificazioni con i rispettivi indici di ramificazione. Verificare la formula di Hurwitz per queste mappe.

4. Sia $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^2$ una curva liscia proiettiva tale che $p = [1 : 0 : 0] \in X$.
   Sia $\pi\colon X \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ la mappa olomorfa definita da $\pi([x : y : z]) = [y : z]$.
   (a) Dimostrare che ponendo
   $$\pi(p) := \left[\frac{\partial F}{\partial z}(p) : -\frac{\partial F}{\partial y}(p)\right]$$
   si estende π in modo olomorfo a tutto X. (Commento: dunque osservate che geometricamente stiamo proiettando dal punto p e l'immagine di p stesso è la pendenza della retta tangente a X in p).
   (b) Qual'è il grado di questa mappa estesa $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$?
   (c) Dimostrare che il divisore di ramificazione di π è in questo caso
   $$R_\pi = div\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - 2p.$$
   (d) Verificare la formula di Plücker per il genere di X usando questa mappa.

5. Sia X la cubica liscia definita dall'equazione
   $$y^2z = x^3 - xz^2.$$
   (a) Calcolare $div(x)$, $div(y)$ e $div(z)$.

(b) Calcolare $div(x^2)$ e $div(3xz + y^2)$.

(c) Dimostrare che $3[0 : 0 : 1]$ non è un divisore di intersezione su X.

(d) Il sistema lineare $|3[0 : 0 : 1]|$ è molto ampio?

6. Sia X la conica proiettiva piana $X = Z(xy - z^2) \subset \mathbb{P}^2$. Se G è un polinomio lineare omogeneo $G(x, y, z) = ax + by + cz$, dare dei criteri, in termini dei coefficienti di G, affinchè $\mathrm{div}G$ sia della forma $2p$ per qualche $p \in X$. È possibile che per qualche G sia $\mathrm{div}G = 3p$ per qualche $p \in X$?

7. Sia X una curva proiettiva piana. Sia $\mathcal{U}_x = \{x \neq 0\}$ in $\mathbb{P}^2$ con coordinate affini $u = y/x$ e $v = z/x$.

   (a) Dimostrare che $\mathrm{d}u$ e $\mathrm{d}v$ definiscono delle $1-$forme meromorfe su tutta X.

   (b) Calcolare $\mathrm{div}(\mathrm{d}u)$ nel caso in cui X sia la curva $Z(y^2z - x^3 - xz^2) \subset \mathbb{P}^2$; e calcolare il grado di questo divisore.

8. Sia X la curva piana proiettiva definita dall'equazione $y^2z = x^3 - xz^2$ in $\mathbb{P}^2$. Siano $p_0 = [0 : 1 : 0]$, $p_1 = [0 : 0 : 1]$, $p_2 = [1 : 0 : 1]$, $p_3 = [-1 : 0 : 1]$. Mostrare le seguenti equivalenze lineari su X:

   (a) $2p_0 \sim 2p_i$ per ogni i;

   (b) $p_1 + p_2 + p_3 \sim 3p_0$.

9. Si considerino le seguenti mappe olomorfe da $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^2$.

   (a) $\alpha([x : y]) = [x^2 : xy : y^2]$;

   (b) $\beta([x : y]) = [x^4 : x^2y^2 : y^4]$;

   (c) $\gamma([x : y]) = [x^3 : xy^2 : y^3]$.

   Stabilire:

   - Il sistema lineare associato, precisando quindi anche il suo grado, e se è completo o meno.
   - Quali tra queste mappe sono immersioni olomorfe?
   - Per quali mappe l'immagine è una superficie di Riemann?
   - Per le mappe che verificano il punto precedente, stabilire il grado della mappa sull'immagine e il grado dell'immagine in $\mathbb{P}^2$, e metterli in relazione con il grado del sistema lineare.

10. Sia X una SdR compatta. Sia D un divisore effettivo > 0 tale che $\dim L(D) = \deg D + 1$. Dimostrare che

    (a) Esiste $p \in X$ tale che $L(p) \geq 2$;

    (b) $X \cong \mathbb{P}^1$.

11. Sia X una SdR compatta non-iperellittica di genere $g \geq 3$ che ammette una mappa di grado 4 in $\mathbb{P}^1$.

    (a) Dimostrare che allora nella sua immagine canonica in $\mathbb{P}^{g-1}$ esistono 4 punti p_0, p_1, p_2, p_3 non linearmente indipendenti.

    (b) Vale il viceversa?

    (c) Di che dimensione è $\mathrm{span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$?

    In generale cosa possiamo dire di analogo per una *SdR* comapatta non-iperellittica che ammette una mappa di grado $d < g$ su $\mathbb{P}^1$?