# ESERCIZI A CASA. I- ottobre 2013

Corso di Geometria I, Università dell'Insubria

1. Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti). Sia $I = (0, 1)$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di $I$.

2. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia $X$ uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, $Y$ un insieme, e $f \colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $Y$

$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$

   (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su $Y$.

   (b) Dimostrare che $f$ è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su $X$ e $f_*\mathcal{T}$ su $Y$.

   (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su $Y$ che rendono $f$ continua.

3. Sia $f \colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in $X$.

4. Siano $X$ e $Y$ due spazi metrizzabili. Dimostrare che il loro prodotto topologico è metrizzabile.

   Una strategia possibile è questa: siano $d_X$ e $d_Y$ metriche su $X$ e $Y$ rispettivamente che inducono le topologie.

   (a) Dimostrate che la funzione

$$d((x, y), (x', y')) := \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$$

   per $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ è una metrica su $X \times Y$.

   (b) Dimostrate che la topologia indotta da $d$ è la topologia prodotto.

5. Sia $f \colon X \longrightarrow Y$ una funzione continua tra spazi topologici in cui $Y$ sia $T2$. Dimostrare che il grafico $\Gamma_f$ di $f$ è chiuso nello spazio prodotto $X \times Y$.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

6. Dimostrare che

   (a) uno spazio $X$ è regolare se e solo se per ogni punto $x \in X$ e per ogni aperto $\mathcal{U} \in \mathcal{I}(x)$ esiste un aperto $\mathcal{V}$ tale che

$$x \in \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U};$$

   (b) uno spazio $X$ è normale se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq X$ e per ogni aperto $\mathcal{U}$ che contiene $C$ esiste un aperto $\mathcal{V}$ tale che

$$C \subseteq \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}.$$

7. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_S)$ la retta di Sorgenfrey. Dimostrare che è uno spazio normale.