ESERCIZI A CASA. II- dicembre 2013

Corso di Geometria I, Università dell'Insubria

1. Sia $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia Euclidea e sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme costituito da tutti e soli i punti che hanno almeno una delle coordinate razionali. Si dimostri che X è connesso per archi.

2. Si determinino le componenti connesse di $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita $\mathcal{K}$.

3. Siano e $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ due topologie su un insieme X. Supponiamo che $\mathcal{T}_1$ sia meno fine di $\mathcal{T}_2$. Se $(X, \mathcal{T}_1)$ è connesso (risp. connesso per archi) possiamo concludere che $(X, \mathcal{T}_2)$ è connesso (risp. connesso per archi)? Viceversa, il fatto che $(X, \mathcal{T}_2)$ sia connesso (risp. connesso per archi) implica che $(X, \mathcal{T}_1)$ è connesso (risp. connesso per archi)?

4. Sia $f: X \longrightarrow Y$ una mappa continua e aperta da uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff connesso Y. Dimostrare che f è suriettiva.

5. Dimostrare (preferibilmente esibendo un omeomorfismo esplicito) che i seguenti spazi sono omeomorfi tra loro:
   - $X = S^2/\{N, S\}$ (la contrazione del sottoinsieme composto dal polo nord $N = (0, 0, 1)$ e dal polo sud $S = (0, 0, -1)$ nella sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$);
   - $Y \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando la figura $C = \{y = (x-1)^2 + z^2 = 0\}$ intorno all'asse z.

6. Si dotino $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ e $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 = 1\}$ delle usuali topologie euclidee e sia $X := [-1, 1] \times S^1$ con la topologia prodotto. Sia poi $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$. Sia $\pi: X \longrightarrow X/Y$ la proiezione canonica sul quoziente. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.
   (a) Lo spazio X/Y è di Hausdorff?
   (b) Lo spazio X/Y è normale?
   (c) Lo spazio X/Y è metrizzabile?
   (d) Gli spazi X e X/Y sono omeomorfi?
   (e) Stabilire se π è aperta e/o chiusa.

7. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio $T1$ se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

8. (La lingua biforcuta). Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = R \times B$ definiamo la relazione di equivalenza
$$(x, a) \sim (y, b) \text{ se } (x, a) = (y, b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$
   Provare che $X/\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.