Connessione

1. Dimostrare che uno spazio con la topologia concreta è sempre connesso.

2. Dimostrare che la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_d)$ non è connessa. Quali sono le sue componenti connesse?

3. Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ si dice *stellato* se esiste un punto $\underline{x}_0 \in S$ tale che per ogni $\underline{y} \in S$ il segmento che unisce $\underline{y}$ e $\underline{x}_0$ è tutto contenuto in S. Dimostrare che i sottoinsiemi stellati sono connessi per archi.

4. Dimostrare che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

5. (fatto a lezione) Quali sono le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea?

6. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta da quella euclidea.

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$Z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dimostrare che non sono omeomorfi.

7. Classificare (cioè suddividere in classi di omeomorfismo) le seguenti lettere greche, come sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta \quad \Theta \quad \Lambda \quad \Xi \quad \Pi \quad \Sigma \quad \Upsilon \quad \Phi \quad \Psi \quad \Omega$$

8. Siano X e Y due spazi topologici. Supponiamo che Y sia connesso. Dimostrare che se $f\colon X \longrightarrow Y$ è un'identificazione le cui fibre sono tutte connesse, allora X è connesso.

9. Dimostrare che:
   (a) Per $n \geq 2$ lo spazio $\mathbb{R}^n$ privato di un qualsiasi punto con la topologia euclidea è connesso per archi.
   (b) Usare il punto precedente per concludere che $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 2$.

10. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 < 1\}$$

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 < 1\}$$

Stabilire quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi con la topologia euclidea.

$$B \cup D \qquad \overline{B} \cup D \qquad \overline{B} \cup \overline{D}.$$

11. Sia S^n la sfera n-dimensionale

$$S^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||\underline{x}|| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

Con la topologia indotta da quella euclidea. Dimostrare che S^n è connesso per archi per $n \geq 1$.

12. Consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (con topologia euclidea).

$$S := \{(x, \sin(1/x)), x \in (0, 1]\}$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (e dimostrarle nel primo caso, confutarle nel secondo).

(a) S è connesso;

(b) S è connesso per archi.

(c) S è omeomorfo a $[0, 1]$;

(d) S è omeomorfo ad $\mathbb{R}$;

(e) $S \cup \{(0, 1)\}$ è connesso;

(f) $S \cup \{(0, 1)\}$ è connesso per archi;

(g) $\overline{S}$ è omeomorfo a $[0, 1]$.