L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2014/2015

Funzioni continue

1. Sia $f\colon (X,\mathcal{S}) \longrightarrow (Y,\mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.
   (a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua;
   (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora f è continua;
   (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora f è continua se e solo se è costante.
2. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, Y un insieme, e $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Y

$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$

   (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su Y.
   (b) Dimostrare che f è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su X e $f_*\mathcal{T}$ su Y.
   (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.
3. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in X.
4. Un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}\colon A \longrightarrow B$ è un omeomorfismo.
   (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.
   (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definita da

$$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

   è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.
   (c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.
   (d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f\colon X \longrightarrow Y$ sono sottospazi discreti di X.