L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2014/2015

Esercizi sugli spazi metrici

1. Quali di queste funzioni sono delle metriche? (dimostrare che lo sono oppure esibire un controesempio). Stabilire quali delle condizioni di metrica sono soddisfatte e quali no.
   (a) $d(x, y) = |x - 4y|$ su $\mathbb{R}$;
   (b) $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$ su $\mathbb{R}$;
   (c) $d(x, y) = \exp(|x - y|) - 1$ su $\mathbb{R}$;
   (d) $d(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_1| + \frac{1}{5}|x_2 - y_2|$, su $\mathbb{R}^2$, (dove $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\underline{y} = (y_1, y_2)$);
   (e) $d(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|$ su $\mathbb{R}^2$.

2. Stabilire quali delle funzioni che sono metriche in (A.1) sono topologicamente equivalenti alla metrica euclidea.

3. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Si considerino le seguenti funzioni da $(X \times Y) \times (X \times Y)$ in $\mathbb{R}$.
   - $f((x, y), (x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y')$
   - $k((x, y), (x', y')) := \begin{cases} \frac{d_X(x,x')}{2|d_X(x,x')|} + d_Y(y, y') \text{ se } x \neq x', \\ d_Y(y, y') \text{ altrimenti.} \end{cases}$
   - $g((x, y), (x', y')) := \min\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$
   - $h((x, y), (x', y')) := \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$
   - $l((x, y), (x', y') := (d_X(x, x'))^2 + d_Y(y, y')$

   Stabilire quali delle funzioni precedenti è una metrica su $X \times Y$ (dimostrare che lo è oppure esibire un controesempio).

4. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la funzione $d' \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$
$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}, \text{ per ogni } x, y \in X.$$
   (a) Dimostrare che d' è una metrica su X tale che $d'(x, y) < 1$ $\forall x, y \in X$. (d' si chiama metrica normalizzata)
   (b) Sia $X = \mathbb{R}^n$, e d_e la metrica euclidea. Sia d'_e la metrica "normalizzata" come sopra. Verificare che le metriche non esistono due numeri α, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che
$$\beta d'_e(\underline{x}, \underline{y}) \leq d_e(\underline{x}, \underline{y}) \leq \alpha d'_e(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{per ogni } \underline{x}, \underline{y} \in X. \tag{1}$$
   (c) Dimostrare che d e d' sono topologicamente equivalenti.

5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la funzione $\widetilde{d}: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\widetilde{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}.$$

   (a) Verificare che $\widetilde{d}$ è una metrica su X. Si chiama *limitazione standard* di d.
   (b) La metrica $\widetilde{d}$ è topologicamente equivalente a d?
   (c) Sia $X = \mathbb{R}^n$ e sia d_e la metrica euclidea su X. La metrica $\widetilde{d_e}$ e la metrica d_e soddisfano delle disuguaglianze del tipo (1)?
   (d) Nella situazione del punto precedente, la metrica $\widetilde{d_e}$ e la metrica d'_e costruita a partire da d_e nell'esercizio (3) soddisfano delle disuguaglianze del tipo (1)?

6. Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e si condsideri l'applicazione $d_f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$d_f(x, y) := |f(x) - f(y)| \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Dimostrare che d_f è una metrica su $\mathbb{R}$ se e solo se f è iniettiva.
   (b) Dimostrare che se f è continua d_f è topologicamente equivalente alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}$.
   (c) Quella del punto precedente è una condizione anche necessaria?

7. Consideriamo l'insieme $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Consideriamo su X la metrica indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$. Questa metrica è equivalente a quella discreta? Stessa domanda con $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$.

8. Sia S un insieme finito. Sia $X = \mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S (cioè la famiglia di tutti i sottoinsiemi di S). Definiamo una funzione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ in questo modo: dati $A, B \subset S$

$$d(A, B) := |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

   Dimostrare che d è una metrica su X. Dimostrare che è equivalente alla metrica discreta.

9. Un sottospazio Y di uno spazio metrico (X, d) si dice *limitato* se esistono $r > 0$ e $\overline{y} \in Y$ tali che $Y \subseteq B_R(\overline{y})$. La limitatezza è una proprietà topologica? Cioè, se un sottospazio è limitato rispetto ad una metrica d, lo è rispetto a tutte le metriche equivalenti a d? (suggerimento: pensare alla metrica euclidea e alle metriche "normalizzata" e "limitazione standard" degli esercizi (3) e (4)).

10. Sia X l'insieme

$$X = \{f: [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea } \},$$

   Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X$$

(a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X.

(b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi rispetto alla metrica d:

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$
$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$
$$C := \{f \in X \mid f \text{ è derivabile}\};$$
$$D := \{f \in X \mid f \text{ è lineare}\}.$$

11. Quali di questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono aperti rispetto alla metrica euclidea? Quali sono chiusi?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \neq 0\}$
(b) $\{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |t| > 1\}$
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| - |y| > 1\}$
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 2\}$
(e) $\{(t,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < t < 1\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, sen(x+y) < 0\}$

12. Quali di questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sono aperti rispetto alla metrica euclidea? Quali chiusi?

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 > 4\}$
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{Q}\}$
(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \notin \mathbb{Q}\}$
(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \notin \mathbb{N}\}$

13. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1, |y| < 2\}$. Quali dei seguenti sottoinsiemi di X sono aperti rispetto alla metrica indotta su X da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$? Quali sono chiusi?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq 1, |y| < \frac{1}{2}\};$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\};$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0, |x| \leq 1\};$$
$$D = B \cup C.$$

14. Siano X e Y spazi metrici. Su X la metrica sia quella discreta. Dimostrare che ogni funzione $f\colon X \longrightarrow Y$ è continua.

15. Sia (X,d) uno spazio metrico. Dimostrare che per ogni metrica d' su X l'identità da (X,d') a (X,d) è un omeomorfismo se e solo se d' è topologicamente equivalente a d.

16. Dimostrare che una funzione tra spazi metrici $f\colon X \longrightarrow Y$ è continua se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq Y$ la controimmagine $f^{-1}(C) \subseteq X$ è un chiuso di X.

17. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $Y \subset X$ un chiuso e $x \in X$ tale che $x \notin Y$. Dimostrare che esistono due aperti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ tali che $x \in \mathcal{U}$, $Y \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. [vedremo che questa proprietà si chiama essere T2 o di Hausdorff]