Geometria Superiore a.a. 2014/2015

Diario delle lezioni:

<u>Martedi' 30 settembre 11-13</u>
Introduzione al corso: cosa sono le Superfici di Riemann e qualche idea su come nascono. L'importanza delle SdR nella matematica moderna.
Prime definizioni. Carte complesse locali, atlante complesso. Definizione di SdR. Primi esempi: piano complesso e sfera di Riemann.

<u>Mercoledi' 1 ottobre 10-13</u>
Struttura topologica e differenziabile delle SdR. Richiami su orientabilita'. Verifica che ogni SdR e' una superficie differenziabile orientabile.
Enunciato del teorema di classificazione di superfici differenziabili compatte. Genere di una SdR.
Altri esempi: retta proiettiva (vediamo come le funzioni di transizione assomigliano a quelle della sferadi Riemann!); tori complessi: richiami topologici.
Definizione di varieta' topologiche e cenni alla classificazione delle superfici topologiche compatte e connesse. Genere di una superficie topologica.
Altri esempi: retta proiettiva (vediamo come le funzioni di transizione assomigliano a quelle della sferadi Riemann!); tori complessi: richiami topologici.

<u>Martedi' 7 ottobre 11-13</u>
Tori complessi: struttura complessa. Sono delle SdR di genere 1.
Curve affini piane. Definizione di punto singolare.
Excursus su funzioni olomorfe di piu' variabili. Teorema della funzione inversa; Teorema della funzione implicita.

<u>Mercoledi' 8 ottobre 10-13</u>
Con il teorema della funzione implicita verifica che le curve affini piane lisce hanno un atlante complesso.
Fatto: (solo enunciato) una curva affine irriducibile e' connessa. Dunque curve lisce irriducibili sono SdR.
Sia X una curva affine di grado 2 (cioe' rappresentata da un polinomio f di grado 2).
Dimostrazione che se X se e' singolare allora f si spezza in due fattori lineari.
Esercizio: w^2-h(z) liscia sse h(z) non ha radici multiple; irriducibile sse h(z) non e' un quadrato.
piani proiettivi P^n: definizioni e prime proprieta'; aperti affini.

<u>Martedi' 14 ottobre 11-13</u>
Piani proiettivi complessi: sono connessi, compatti, 2-numerabili, T2.
Polinomi omogenei; proprieta'. Curve proeittive: luogo degli zeri di polinomi omogenei in P^2. Curve affini assoiciate sugli aperti coordinati.

<u>Mercoledi' 15 ottobre 10-13</u>
Definizione di curva proiettiva liscia. Formula di Eulero e condizione equivalente sulle derivate. Atlante complesso su curve proiettive lisce.
Una curva proiettiva liscia ha polinomio irriducibile e gli zeri di un polinomio irriducibile sono connessi. Idea della dimostrazione.

Conseguenza: curve proiettive lisce sono SdR.
Lemma di Study (enunciato) nel caso affine e proiettivo.
Cenni a curve intersezioni complete lisce in P^n.

<u>Venerdi' 31 ottobre 14-16</u>
Risoluzione degli esercizi a casa di ottobre.
In particolare abbiamo visto come studiare la proiezione di una curva liscia piana da un punto a lei esterno su P^1. Nel caso in cui P=[1:0:0] questa proiezione e' proprio [x:y:z]—>[y:z].

<u>Martedi' 4 novembre 10,30-13</u>
Fine risoluzione esercizi. Ripasso sul criterio di irriducibilita' di Gauss.
Funzioni olomorfe su SdR. Definizione, prime proprieta' ed esempi. Teorema del massimo modulo e conseguenza importante: non esistono funzioni olomorfe globali su una SdR compatta.

<u>Mercoledi' 5 novembre 10,30-13</u>
Funzioni meromorfe su SdR. Definizioni e prime proprieta'. Teoremi ereditati dall'analisi complessa.
Esempi importanti: su P^1 le funzioni meromorfe sono i quozienti di polinomi omogenei dello stesso grado.
Funzioni theta su tori complessi. Funzioni meromorfe che sono quozienti di prodotti di funzioni theta traslate.
Definizione di mappa olomorfa tra SdR. Definizione di isomorfismo o biolomorfismo.
Primo esempio: P^1 e la sfera di Riemann sono isomorfe.

<u>Martedi' 11 novembre 10,30-13</u>
Teoremi ereditati dall'analisi complessa:
- mappe olomorfe sono aperte.
- Una mappa iniettiva e' isomorfismo sull'immagine.
- Teorema di identita' tra mappe.
Teo: se X e' una SdR compatta e F una mappa olomorfa noncostante in Y SdR, allora F e' suriettiva e Y compatta.
Prop: le fibre di una mappa olomorfa sono discrete (nel caso compatto dunque finite).
Corrispondenza biunivoca tra funzioni meromorfe su una SdR e mappe olomorfe nel P^1.
Esempi: 1) funzioni meromorfe su curve lisce proiettive e mappe associate. 2) funzioni meromorfe su P^1 e mappe associate.
Tori complessi: esercizio K pag. 43 Miranda

<u>Mercoledi' 12 novembre 10,30-13</u>
Mappe meromorfe su tori complessi.
Forma locale normale di mappe olomorfe. Calcolo esplicito. Esempi.
Definizione di punti di ramificazione e di branch. Relazione tra molteplicita' di una mappa in P^1 in un punto e ordine della funzione meromorfa associata. Esercizio II 4.G Miranda.
Grado di una mappa olomorfa tra SdR compatte. Esempi.
Cor: una mappa olomorfa tra SdR compatte e' un isomorfismo se e solo se ha grado 1.
La somma degli ordini di una funzione meromorfa sui punti di una SdR compatta e' zero.

<u>Martedi' 18 novembre 10,30-13</u>
Triangolazione di una superficie topologica. Numero di Eulero: idea dell'invarianza rispetto

alla triangolazione. Dimostrazione topologica del Teorema di Riemann-Hurwitz.

<u>Martedi' 2 dicembre 10,30-13</u>
Conseguenze della formula di Riemann-Hurwitz: se ho una mappa olomorfa noncostante tra X e Y SdR compatte, allora $g(X)>=g(Y)$. Una mappa olomorfa noncostante da una superficie di genere positivo in P^1 ha sempre almeno un punto di ramificazione.
Esempi di SdR: le rette in P^2 sono isomorfe a P^1. Anche le coniche lisce in P^2 sono isomorfe a P^1.
Incollamento di SdR lungo aperti isomorfi: se lo spazio ottenuto e' T2 e' ancora una SdR.

<u>Mercoledi' 3 dicembre 10,30-13</u>
Superfici di Riemann iperellittiche.
Esercizio sui tori complessi e sulle mappe olomorfe tra tori.

<u>Martedi' 9 dicembre 10,30-13</u>
1-forme olomorfe e meromorfe su SdR. Zeri e poli. Esempi.
Operazione su 1-forme: moltiplicazione per funzioni mromorfe. Pullback di 1-forma tramite mappa continua. Lemma su come si trasformano gli ordini. Esercizio

<u>Mercoledi' 10 dicembre 10,30-13</u>
Richiami di integrazione complessa. Integrazione di 1-forme meromorfe su SdR. Catene di cammini e integrazione su catene.
Teorema dei Residui (solo enunciato).

<u>Lunedi' 15 dicembre 10,30-13</u>
Divisori su SdR. Grado nel caso compatto. Divisori principali. Divisori di 1-forme meromorfe: divisori canonici. Divisori principali e canonici su P^1. Es. V.1.A.
Lemma sulle 1-forme meoromorfe. Pullback di divisori. Grado su SdR compatte. Pullback di divisori principali e di divisori canonici. Dimostrazione algebrica del teorema di Riemann-Hurwitz.

<u>Martedi' 16 dicembre 10,30-13</u>
Excursus sulle curve proiettive piane. Intersezioni complete in P^n, intersezioni complete locali. Cubica gobba. Insiemi immmersi in modo olomorfo e curve proiettive lisce. Quozienti di polinomi omogenei danno funzioni meromorfe su curve proiettive lisce. Divisori di intersezione di polinomi omogenei su curve proiettive. Il caso di curve proiettive piane e polinomi lineari.

<u>Mercoledi' 17 dicembre 10,30-13</u>
Divisori di branch e ramificazione di una mappa olomorfa. Equivalenza lineare tra divisori. Prime proprietà. Equivalenza lineare su P^1. Grado di curve proiettive. Teorema di Bezout.

<u>Mercoledi' 7 gennaio 10,30-13</u>
Divisore di ramificazione della proiezione di una curva proiettiva da un punto esterno. Formula di Plucker per il genere di curve piane. Qualche nozione di geometria proiettiva. Spazio proiettivo su uno spazio vettoriale. Dimensione proiettiva. Sottospazi e formula di Grassmann. Esempio: due rette in P^2 si incontrano sempre in un punto.

<u>Martedi' 13 gennaio 10,30-13</u>
Relazione di ordine (non totale) tra divisori. Divisori effettivi. Spazio di funzioni meromorfe

L(D) associato a un divisore D. Esempio: spazi L(D) su P^1. Proprieta'. Esercizio V.3.C Miranda. Sistemi lineari completi. Struttura di spazio proiettivo nel caso compatto. Pencil lineare associato a una mappa in P^1. Se D_1 e D_2 sono divisori equivalenti, allora L(D_1) e' isomorfo a L(D_2). Sistemi lineari.

<u>Mercoledi' 14 gennaio 10,30-13</u>
Esempio in dettaglio: sistema lineare dei divisori iperpiani per una curva proiettiva. Spazio di 1-forme associate a un divisore L^1(D). Prime proprieta'. Teo: L^1(D) e' isomorfo a L(K+D). Dimostrazione che hanno tutti dimensione finita.
Divisori e mappe nel proiettivo. Mappe olomorfe in P^n. Corrispondenza con (n+1)-ple di funzioni meromorfe globali. Sistema lineare |f| associato a una mappa olomorfa f.
Dimensione di |f|: definizione di mappe degeneri. Definizione di punti base. Verifica che i sistemi associati a mappe olomorfe non hanno punti base.

<u>Martedi' 20 gennaio 10-13</u>
I sistemi lineari senza punti base definiscono mappe olomorfe. Definizione geometrica; in particolare corrsipondenza con i divisori di intersezione nel caso di immersioni olomorfe. Condizione necessaria e sufficiente perche' una mappa associata a un sistema lineare sia una immersione olomorfa. Definizione di sistemi lineari molto ampi. Enunciato del teorema di Riemann-Roch. Prime applicazioni: ogni SdR compatta e' una curva proiettiva: ogni divisore di grado >= 2g+1 e' molto ampio. Le SdR di genere 0 sono tutte isomorfe a P^1. Le SdR di genere 1 sono tutte isomorfe a cubiche piane lisce (non dimostrato: in effetti sono isomorfe a tori complessi).

<u>Mercoledi' 21 gennaio 10-13</u>
Fatto (non dimostrato): le SdR iperellittiche sono tutte e sole le SdR compatte che hanno una mappa di grado 2 in P^1.
Altre applicazioni di Riemann-Roch: studio del sistema canonico su una SdR X di genere strettamente positivo. E' senza punti
base. Il sistema canonico e' molto ampio se e solo se X non e' iperellittica. Nel caso iperellittico la mappa canonica fattorizza come la mappa iperellittica composta con l'immersione di Veronese.
Forma Geometrica di Riemann-Roch: definizione di span di un divisore effettivo.
Dimensione dello span. R-R geometrico.
Applicazione: una SdR ha una mappa di grado 3 su P^1 se e solo se ci sono tre punti non allineati nella sua immagine canonica.