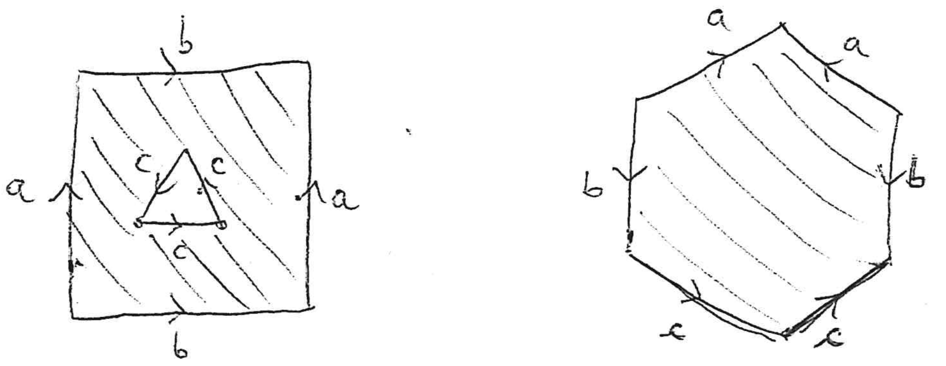
Corso di Istituzioni di Geometria Superiore

Università dell'Insubria

5 settembre 2016

Cercate sempre di dimostrare le vostre affermazioni

10 1. Si considerino le figure piane con l'identificazione dei lati illustrata in figura.



   (a) Qualcuno di questi spazi è una superficie topologica?

   (b) Calcolarne i gruppi fondamentali.

10 2. (a) Enunciare la classificazione dei rivestimenti connessi di spazi connessi e semi-localmente semplicemente connessi e dare un cenno della sua dimostrazione.

   (b) Descrivere la corrispondenza per S^1 e per il piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$.

10 3. (a) Definire un complesso simpliciale. Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Definire i suoi gruppi di omologia.

   (b) Calcolare usando la definizione l'omologia simpliciale di un complesso composto da un numero finito di vertici e nessun altro simplesso in dimensione superiore (spazio topologico associato un'unione finita di punti).

   (c) Dato un complesso simpliciale $\mathcal{K}$ il gruppo di omologia $H_0(\mathcal{K})$ che informazione topologica fornisce sullo spazio topologico associato?

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore

Docente: Lidia Stoppino

Università dell'Insubria

9 luglio 2014

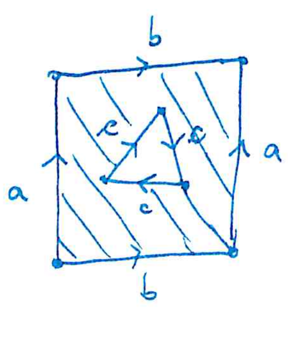
Cercate sempre di dimostrare le vostre affermazioni

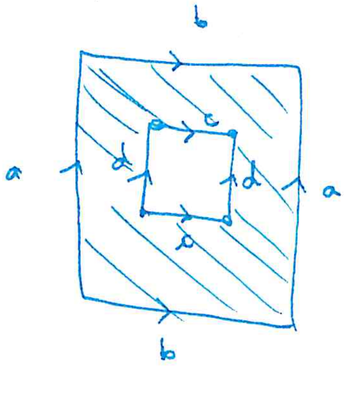
1. Sia X il il prodotto wedge (incollamento in un punto) di S^2 con S^1: $X = S^2 \vee S^1$.
   (a) Classificare tutti i rivestimenti connessi di X.
   (b) Si considerino le seguenti applicazioni continue $f, g \colon S^1 \longrightarrow X$:
   - f è ottenuta componendo la mappa
   $$z \in S^1 \mapsto z^6 \in S^1$$
   (visti come sottospazi di $\mathbb{C}$) con l'inclusione $S^1 \subset X$.
   - Consideriamo $\overline{\gamma} \colon S^1 \to S^2$ indotta dalla mappa $\gamma \colon [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ così definita:
   $$\gamma(t) := (0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$
   e g si ottiene componendo con l'inclusione $S^2 \subset X$.

   Quali sono i rivestimenti $\widetilde{X}$ di X tali che f si solleva ad una mappa $\widetilde{f} \colon S^1 \longrightarrow \widetilde{X}$? Stessa domanda per la mappa g.

2. Siano X e Y le figure piane con l'identificazione dei lati illustrata in figura.
   (a) Qualcuno di questi spazi è una superficie topologica?
   (b) Calcolarne i gruppi fondamentali.
   (c) Calcolarne i gruppi di omologia.
   (d) Per almeno uno degli spazi esibire esplicitamente una triangolazione (cioè un complesso singolare il cui spazio topologico soggiacente sia lo spazio dato), scriverne il complesso cellulare e calcolare l'omologia in questo modo.
   (e) se qualcuno tra X e Y è una superficie topologica, scriverne la forma canonica secondo la classificazione delle superfici.

3. Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale e $v \in \mathcal{K}^{(0)}$ un suo vertice. Dimostrare che
$$H_n(\mathcal{K}, v) \cong \widetilde{H}_n(\mathcal{K}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
usando la sequenza esatta di omologia ~~ridotta~~ della coppia $(\mathcal{K}, v)$.





Corso di Istituzioni di Geometria Superiore

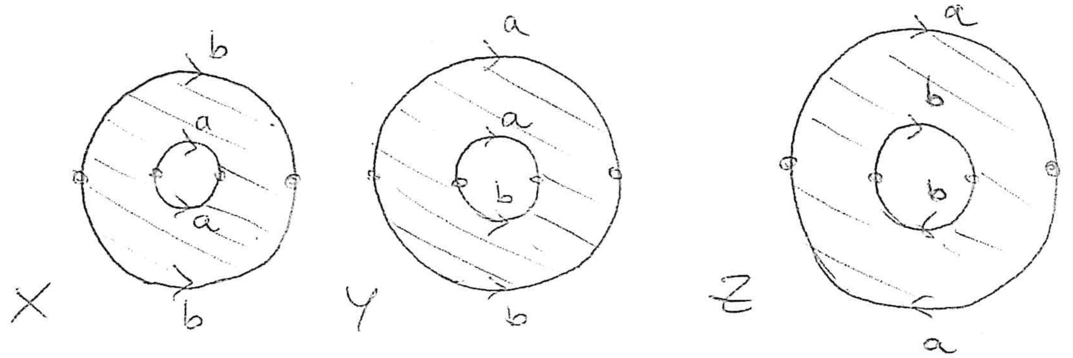
Docente: Lidia Stoppino

Università dell'Insubria

15 giugno 2016

Cercate sempre di dimostrare le vostre affermazioni

1. Siano X, Y e Z le figure piane con l'identificazione dei lati illustrata in figura.



   (a) Qualcuno di questi spazi è una superficie topologica?

   (b) Calcolarne i gruppi fondamentali.

2. Enunciare la classificazione delle superfici topologiche compatte e connesse.

3. Mostrare che se $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ sono due rivestimenti, allora $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento. Se conosciamo i sottogruppi $(p_1)_*\pi_i(\widetilde{X}_1, \widetilde{x_1}) \subseteq \pi_1(X, x_1)$ $(p_2)_*\pi_i(\widetilde{X}_2, \widetilde{x_2}) \subseteq \pi_1(X, x_2)$ (con $\widetilde{x_1} \in p_1^{-1}(x_1), \widetilde{x_2} \in\in p_2^{-1}(x_1)$, sappiamo com'è fatto il sottogruppo di $\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$?

4. Definire un complesso simpliciale. Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Definire i suoi gruppi di omologia. Fare un esempio di:

   - Un complesso che abbia gruppo di omologia abeliano libero;
   - un complesso che abbia un gruppo di omologia con una parte di torsione non banale.