

Soluzione del punto 1(e) dello scritto di Advanced Geometry

Del 28/06/18

(e) Fare un esempio di uno spazio prodotto e di un suo rivestimento che non sia prodotto di rivestimenti sui due spazi:

Abbiamo visto nei punti precedenti che se ho un rivestimento prodotto  $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  allora il gruppo associato è

$$p_1 \star \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \times p_2 \star \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) < \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$$

Considero  $X_1 = X_2 = S^1$

Considero la decomposizione associata

$$\pi_1(S^1 \times S^1, (1,1)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Basta prendere un sottogruppo che non sia il prodotto di due sottogruppi di  $\mathbb{Z}$ ; ad esempio:

$$\text{dato } H := \langle (1,1) \rangle = \{ (n,n) \mid n \in \mathbb{Z} \} < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Si come  $S^1 \times S^1$  è s.l.s.c. esiste

$\tilde{X}_H$  rivestimento tale che  $\exists \tilde{x}_0 \in$

$$\begin{array}{c} \downarrow p_H \\ S^1 \times S^1 \end{array} \quad \pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0) = H$$

Se  $\tilde{X}_H$  fosse isomorfo ad un rivestimento

$$\text{prodotto } p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow S^1 \times S^1$$

$$\text{avrei } \tilde{X}_H \xrightarrow{\varphi} \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \quad p_H \star \pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0) = (p_1 \times p_2) \star (\varphi \star \pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0)) =$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow p_1 \times p_2 & \\ p_H \searrow & & \\ & S^1 \times S^1 & \end{array} \quad = (p_1 \times p_2) \star (\pi_1(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))) = p_1 \star \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \times p_2 \star \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$