Esame di Istituzioni di Geometria Superiore

Università dell'Insubria

26 giugno 2019

1. Si consideri il bouquet di due circonferenze

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

   (a) Descrivere tutti i suoi rivestimenti di grado 2. *[3 punti]*

   (b) Definire un rivestimento normale. Tra i rivestimenti di grado 2 elencati sopra ce ne è qualcuno non normale? *[3 punti]*

   (c) Descrivere un rivestimento non normale di grado 3 di X. *[3 punti]*

   (d) Si consideri la seguente applicazione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow X$:

$$f(t) := (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t), \cos(2\pi t) + 2, \sin(2\pi t))$$

   e sia $\overline{f}\colon \mathbb{R} \to X$ l'applicazione indotta da f passando al quoziente tramite la mappa esponenziale $\mathbb{R} \to S^1$. Descrivere tutti i rivestimenti di grado due e tre di X tali che $\overline{f}$ si solleva al rivestimento. Invece f si solleva? *[3 punti]*

2. Si consideri la figura piana coi lati identificati come in figura, che chiamiamo X.

   (a) Se ne calcoli il gruppo fondamentale. *[3,5 punti]*

   (b) È un gruppo abeliano? Se ne calcoli l'abelianizzato. *[3,5 punti]*

   (c) X è una superficie topologica? Spiegare perché. *[3 punti]*

3. Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale composto di 4 vertici $v_0, \ldots, v_3$, dei 5 1-simplessi $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$, $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_3]$, $[v_2, v_3]$ e del 2-simplesso $[v_0, v_1, v_2]$.

   (a) Controllare che sia un complesso simpliciale (scrivendo la definizione di complesso simpliciale). *[3 punti]*

   (b) Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di $\mathcal{K}$. *[3 punti]*

   (c) Sia ora $\mathcal{L} := \mathcal{K} \setminus \{[v_0, v_3]\}$. Controllare che $\mathcal{L}$ sia un complesso simpliciale e calcolarne l'omologia simpliciale. *[3 punti]*