Esame di Istituzioni di Geometria Superiore

Università dell'Insubria

22 febbraio 2019

1. (a) Definire un rivestimento, un sollevamento di una applicazione ed enunciare il teorema di sollevamento delle mappe. *[3 punti]*

   (b) Si consideri la seguente applicazione dal toro in sè stesso: $p: S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ $p(z,w) = (z^2, w^3)$ (in notazioni coplesse $S^1 \subset \mathbb{C}$). È un rivestimento? Di che grado? Si calcoli $p_*(\pi_1(S^1 \times S^1(1,1))$ e si verifichi il legame con l'indice di questo sottogruppo. *[3 punti]*

   (c) Si considerino le seguente applicazioni $f, g: S^1 \to S^1 \times S^1$, $f(v) := (v, v^3)$ e $g(v) := (1, v^3)$. Stabilire se si sollevano tramite p e in caso positivo scrivere esplicitamente dei sollevamenti. *[3 punti]*

   (d) Si considerino le corrispondenti applicazioni dall'intervallo unitario $I = [0,1]$ $\overline{f}, \overline{g}: I \to S^1 \times S^1$ $\overline{f}(t) := (e^{2\pi i t}, e^{6\pi i t})$ e $\overline{g}(t) := (1, e^{6\pi i t})$. Queste applicazioni si sollevano tramite p? Perché? *[3 punti]*

2. Si consideri la figura piana coi lati identificati come in figura, (*) che chiamiamo X.

   (a) Si enunci il teorema di classificazione delle superfici topologiche. *[3 punti]*

   (b) Se ne calcoli il gruppo fondamentale. È un gruppo abeliano? *[3,5 punti]*

   (c) X è una superficie topologica? Spiegare perché, e, in caso positivo, classificarla. *[3,5 punti]*

3. (a) Definire un complesso simpliciale. Si consideri il complesso $\mathbb{K}_\sigma$ associato ad un simplesso e δK_σ il complesso associato al bordo del simplesso. Scrivere quanto vale l'omologia. *[3 punti]*

   (b) Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale finto in $\mathbb{R}^3$ composto di 4 vertici $v_0, \ldots, v_3$, 6 1-simplessi $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$, $[v_0, v_3]$, $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_3]$, $[v_2, v_3]$ e un 3-simplesso $[v_0, v_1, v_2]$.

   (c) Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di $\mathcal{K}$ esplicitamente. *[3 punti]*

   (d) Giustificare i risultati sull H_0 e sull'H_1 usando i risultati generali che legano la topologia di $|\mathcal{K}|$ alla sua omologia. *[3 punti]*

(*)