Esame di Istituzioni di Geometria Superiore

Università dell'Insubria

Novembre 2018

1. (a) Definire un rivestimento di uno spazio connesso e localmente cpa; dimostrare che le fibre sono discrete, e che se lo spazio totale è connesso, allora la cardinalità delle fibre è costante. Definire il rivestimento universale e dire quali spazi lo ammettono. *[5 punti]*

   (b) Sia X uno spazio topologico connesso per archi tale che il suo rivestimento universale $p\colon U \to X$ ha grado k con k numero primo. Dimostrare che per ogni $x_0 \in X$ vale che $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *[5 punti]*

2. Si consideri la figura piana coi lati identificati come in figura, che chiamiamo X.

   (a) Se ne calcoli il gruppo fondamentale. È un gruppo abeliano? *[4 punti]*

   (b) X è una superficie topologica? Spiegare perché. *[3,5 punti]*

   (c) Se considero il poligono senza l'identificazione (un pentagono regolare) esiste una identificazione dei lati tale che il quoziente è una superficie topologica? *[3,5 punti]*

3. Sia $\mathcal{K}$ il complesso simpliciale composto di 4 vertici $v_0, \ldots, v_3$, 5 1-simplessi $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$, $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_3]$, $[v_2, v_3]$.

   (a) Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di $\mathcal{K}$. *[5 punti]*

   (b) Sia ora $\mathcal{L} := \mathcal{K} \cup \{[v_0, v_1, v_2]\}$. Controllare che $\mathcal{L}$ sia un complesso e calcolarne l'omologia simpliciale. *[5 punti]*