Rivestimenti e loro classificazione

<u>def</u> X spazio topologico

un rivestimento di X

è $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ $\tilde{X}$ sp. top. P continua e suriettiva

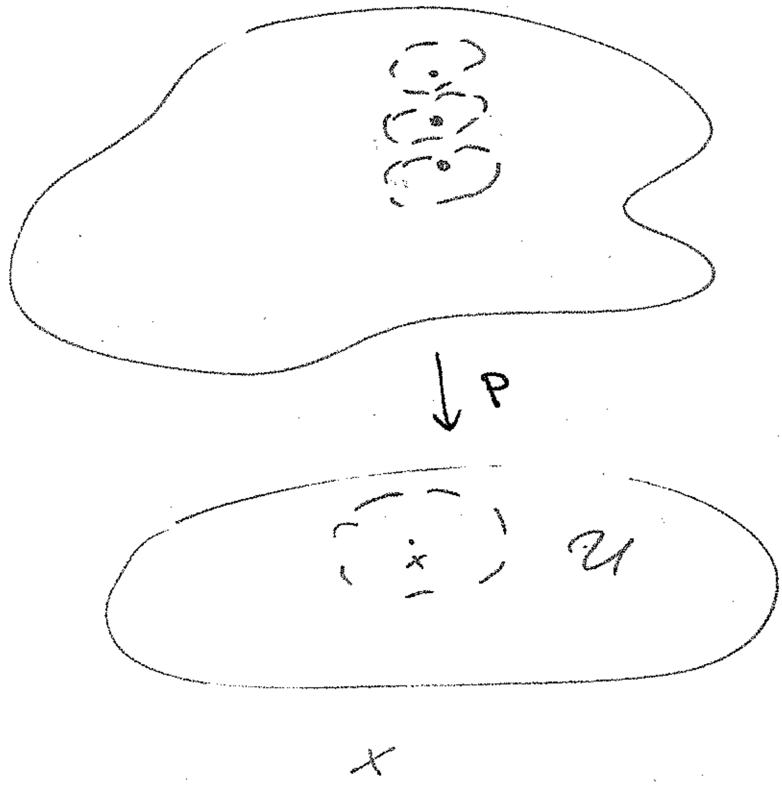
tale che $\forall\, x \in X$ $\exists\, U \ni x$ aperto tale che

$$p^{-1}(U) = \text{unione disgiunta di aperti in } \tilde{X} = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

tali che $\forall \alpha \in A$ $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow U$

è un omeomorfismo

un tale U si chiama "uniformemente rivestito da p"



<u>oss</u> se $p: \tilde{X} \longrightarrow X$

è un rivestimento

allora $p^{-1}(x)$ $\forall x \in X$ ha la topologia discreta:

infatti, per def $\forall x \in X$ $\exists\, \mathcal{U}$ aperto tc

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha \quad \text{con } p|_{V_\alpha} \text{ omeo su } \mathcal{U}$$

allora $\forall \alpha$ $V_\alpha \cap p^{-1}(x) =$ 1 solo punto chiamiamolo $\{x_\alpha\}$

<u>OSS 2.</u>

un rivestimento ha sempre la proprietà che p è <u>aperta</u> : (oss: allora è una mappa quoziente)

sia $W \subseteq \tilde{X}$ un aperto

voglio vedere che $p(W)$ è aperto in X

sia $x \in p(W)$ sia $\mathcal{U} \ni x$ aperto uniformemente ricoperto sia $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup V_\alpha$

sia $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ $\quad \tilde{x} \in V_{\bar{\alpha}} \cap W$

(ok - $x \in p(W)$)

ora $V_{\bar{\alpha}} \cap W$ è aperto e

$p|_{V_{\bar{\alpha}}}$ è un omeomorfismo $\Rightarrow$

$p(V_{\bar{\alpha}} \cap W)$ è aperto in $\tilde{X}$

$$x \in \underbrace{p(V_{\bar{\alpha}} \cap W)}_{\text{aperto}} \subseteq p(W)$$

$\boxed{\text{ok}}$

<u>ESEMPI</u>

0. $id : X \to X$ è un rivestimento (l'unico con fibre di # 1)

1. Abbiamo visto che se G è un gruppo <u>finito</u> che agisce <u>liberamente</u> su uno spazio <u>compatto</u>

$$X \xrightarrow{\pi} X/G \quad \text{è un rivestimento}$$

2. più in generale abbiamo visto che se G è un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico X allora $X \longrightarrow X/G$ è un rivestimento

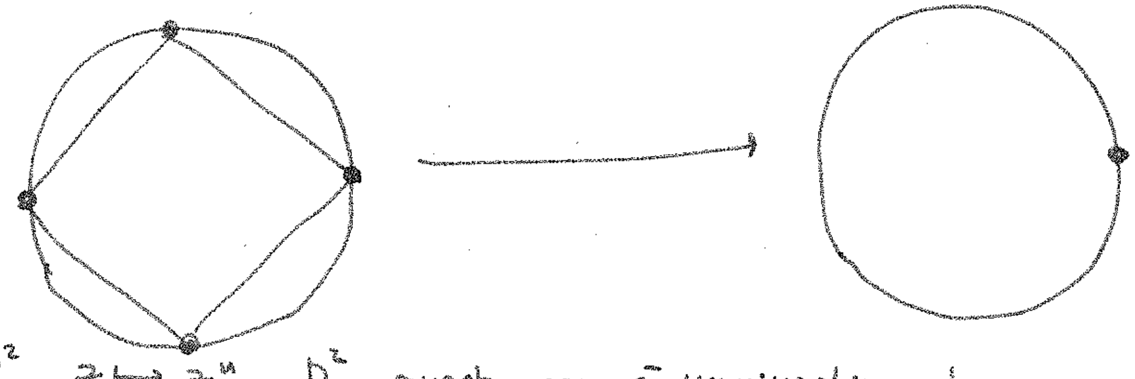
3. $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ mappa esponenziale

$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ è un <u>rivestimento</u>

(oss è anche $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con azione per traslazione)

4.
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^{>0}$$

è un rivestimento.



5. $D^2 \xrightarrow{z \mapsto z^n} D^2$ questo <u>non</u> è un rivestimento, ma lo è se tolgo $\{0\}$

ESERCIZI : → un rivestimento è un omeomorfismo locale (ma non viceversa, controesempio: $\mathbb{R}^{>0} \to S^1$ con $e^{i\theta}$)

→ $\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X_1$ $\tilde{X}_2 \xrightarrow{p_2} X_2$ rivestimenti.

allora $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ lo è.

[dunque restrizione di rivestimenti non. nec. è rivestimento]

→ sia $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento tale che

Teo 53.2

$|p^{-1}(x)| < +\infty \quad \forall x \in X.$

allora $\tilde{X}$ compatto e T2 $\iff$ X compatto e T2

OSS: $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento

$$x \longmapsto \# \{p^{-1}(x)\}$$

$$X \longrightarrow \mathbb{N}^{>0} \cup \{+\infty\} =: \overline{\mathbb{N}}$$ con top. discreta

questa funzione è continua:

$\forall n \in \overline{\mathbb{N}} \quad \varphi^{-1}(n)$ è aperto:

sia $x \in \varphi^{-1}(n)$ allora $p^{-1}(x) = n$

Dunque, sia U un aperto unif. riv. che contiene x:

allora $\varphi(U) = n$ cioè $U \subseteq \varphi^{-1}(n)$

infatti: sia $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$ sia $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$

$\forall i = 1, \dots, n$

$\exists \alpha_i$ tale che $V_{\alpha_i} \ni \tilde{x}_i$

questo perché $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$

e inoltre α_i è unico perché l'unione è disgiunta e $p_{|V_{\alpha_i}}$ è omeomorfismo su U.

Allora $\forall\, y \in U$ $\quad p^{-1}(y) = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n\}$

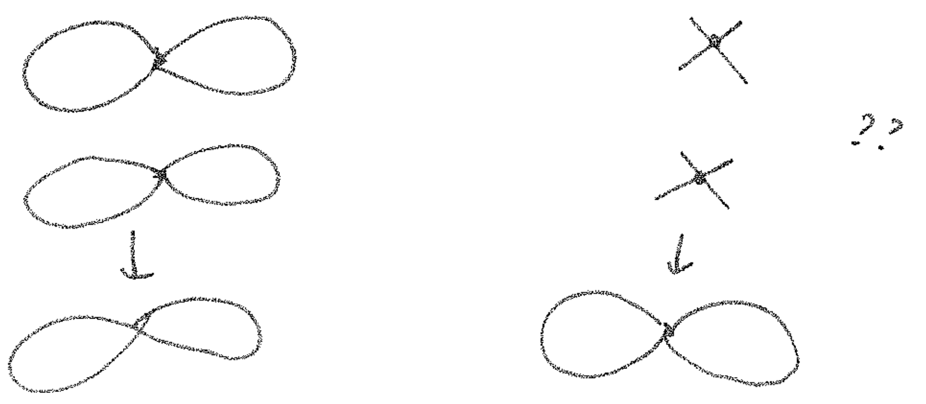
con $\quad \tilde{y}_i := V_{\alpha_i} \cap p^{-1}(y)$

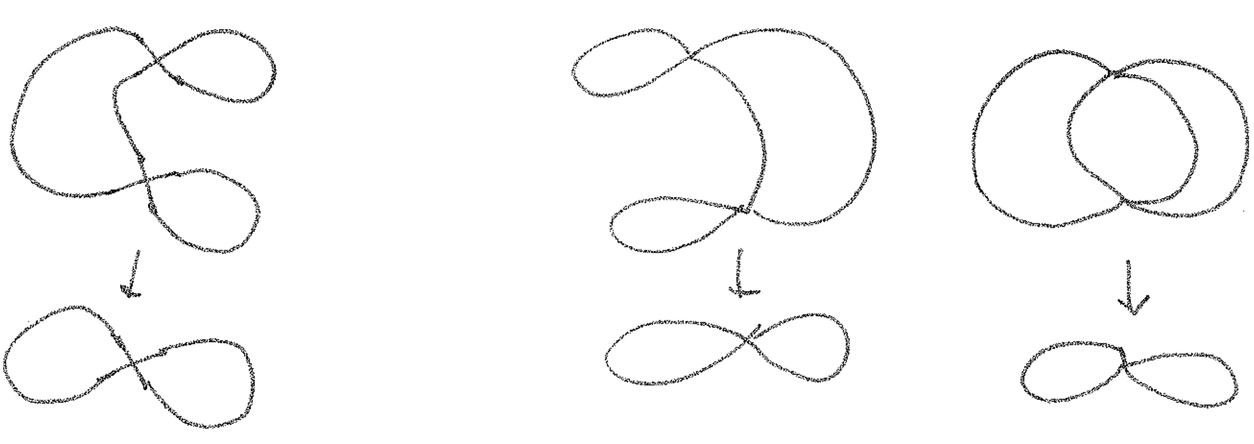
che, per le osservazioni precedenti, è un singolo punto.

<u>def</u> Se $\varphi \equiv \text{cost}$ allora $\operatorname{im}\varphi \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{+\infty\}$ si chiama <u>grado</u> del rivestimento

<u>ES:</u> $p: \hat{X} \to X$ è rivestimento di grado 1 $\Leftrightarrow$ è omeomorfismo

<u>Esempio illuminante</u>: rivestimenti di grado 2 della figura a otto:





e $\hat{X}$ in questi esempi è sempre diverso!

ES: Quelli di grado 3?

Quello che vedremo in generale è che $\begin{pmatrix}\text{sotto certe}\\\text{ipotesi}\end{pmatrix}$

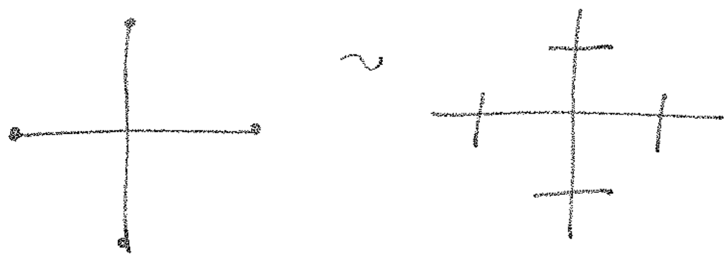
$\boxed{\text{il gruppo fondamentale di } X \text{ governa i rivestimenti}}$

con una corrispondenza tra i suoi sottogruppi e i rivestimenti che rispecchia la corrispondenza di Galois (e infatti si chiama corrispondenza di Galois)

E la "simmetria" o meno di questi rivestimenti si specchierà nell'essere o meno normale del sottogruppo corrispondente

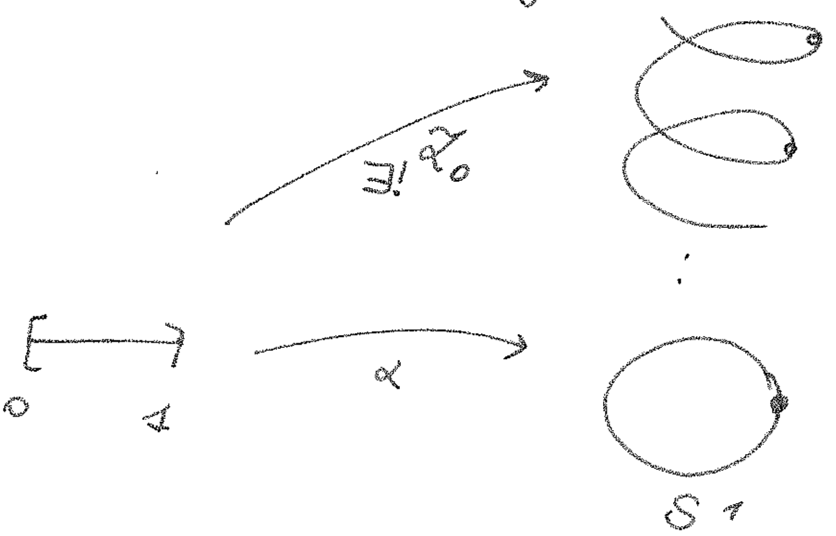
Esempio evocativo

(il) rivestimento semplicemente connesso della figura a otto. (Ref Hatcher)



Rapido richiamo di quello che succede per il gruppo fondamentale di S^1:

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, 1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\longmapsto \deg \alpha \end{aligned}$$



$\deg \alpha := \tilde{\alpha}_0(1)$ punto finale del sollevamento di α con punto iniziale 0

In modo analogo, vedremo che se ho (sotto opportune ipotesi)

$$\left.\begin{array}{l} X \longrightarrow X/G \\ \text{azione PD} \end{array}\right\} \text{ allora } \boxed{G \cong \pi_1(X, x_0)}$$

in generale non tutti i rivestimenti derivano da una azione di gruppo ma

<u>il gruppo fondamentale di X governa i suoi rivestimenti.</u>

Teo di sollevamento delle omotopie → nella versione più generale

Dato $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento, Y sp top

sia F omotopia tra f_0 e $f_1 : Y \to X$

s $\exists$ un sollevamento $\tilde{f}_0 : Y \to \tilde{X}$

allora

"si solleva l'omotopia"

$\exists !\ \tilde{F} : Y \times I \to \tilde{X}$

tale che $p \circ \tilde{F} = F$

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[d] \\
Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}_0"] \arrow[r, "f_0"'] & X \\
Y \times I \arrow[ur, bend right, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

dim (è la stessa identica dimostrazione fatta in Geo 1 per il sollevamento dell'omotopie tra cammini $I \to S^1$ e $\mathbb{R}$

Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di X composto di aperti uniformemente rivestiti da p

fisso $y_0 \in Y$

voglio costruire $\tilde{F}$ localmente vicino a y_0

per la continuità di F (in $(y_0, t)\ \forall t \in I$)

$\forall t \in I \quad \exists\ (a_t, b_t) \ni t$ ed $\exists\ N_t \ni y_0$
$(\cap [0,1])$

tale che $F(N_t \times (a_t, b_t)) \subseteq$ uno degli U_α

$(U_{\bar{\alpha}}$ tale che $F(y_0, t) \in U_{\bar{\alpha}})$

per la compattezza di $\{y_0\} \times I \sim I$

+ qualche passaggio

$\exists \quad t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1$

ed $\exists \ W \ni y_0$
aperto

tale che $F(W \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq$ qualcuno degli U_α

$\forall i = 1, \dots, m-1$

allora $\forall i$ fisso α_i tale che

ora costruiamo $\tilde{F}$ su $W \times [0, 1]$

per induzione su i

su $[0, t_1]$

$$\begin{tikzcd} V^1_\gamma \subset \bigsqcup V^1_\gamma = p^{-1}(U_{\alpha_1}) \arrow[dr, "p|_{..} = g"] \arrow[d, phantom] & \\ W \times [0, t_1] \arrow[r, "F"] & U_{\alpha_1} \end{tikzcd}$$

allora $\exists! \ V^1_\gamma$ tale che $f_0(y_0) \subseteq V^1_\gamma$

costruisco dunque $\tilde{F}$ usando

$$g^{-1} \circ F$$

Dunque ho costruito $\tilde{F}$ su $W \times I$ | ma è estensione di F??

io comunque so che $\tilde{f}_0^{-1}(V_{\tilde{\gamma}}^1)$ è un aperto in Y che contiene y_0

allora posso restringermi a

$$W \cap \tilde{f}_0^{-1}(V_{\tilde{\gamma}}^1)$$

e quindi sto sollevando localmente $\tilde{f}_0$

Dunque $\forall y \in Y$
ho che $\exists\ W_y$ aperto che contiene y
tale che $\exists\ \tilde{F}$ su $W_y \times I$
estensione di $\tilde{f}_0$ su $W_y \times \{0\}$ | in modo unico
OK questo è vero.

Se ho $W_{y_1} \cap W_{y_2} \neq \emptyset$

allora posso usare il Lemma di incollamento su aperti e definire $\tilde{F}$ su tutto $Y \times I$

$\boxtimes$

Applicazioni:

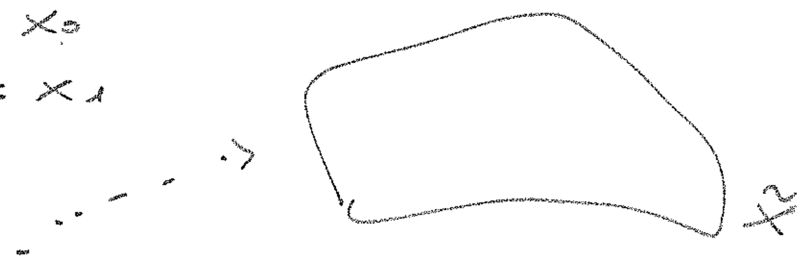
1) $Y = \{pto\}$ Dato γ $f: I \longrightarrow X$ cammino, con $p: \tilde{X} \to X$

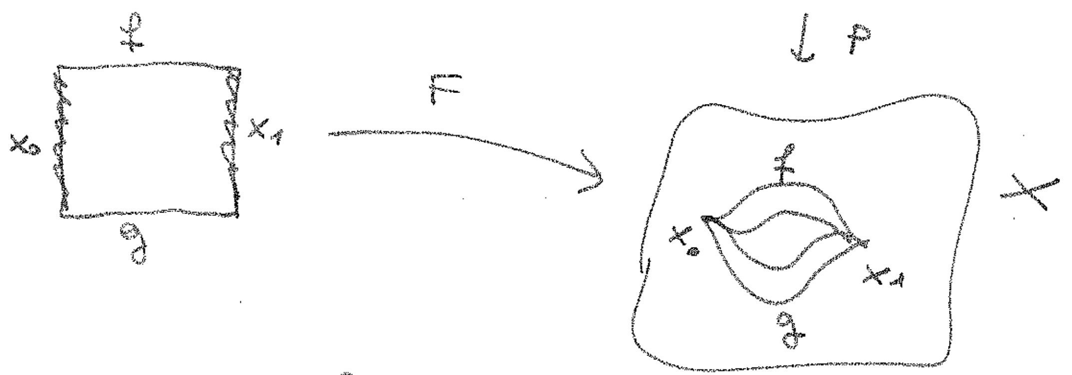
fissato $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(0))$ $\exists!\ \tilde{f}$ che solleva f

è: Teorema di sollevamento dei cammini

Dati $f, g : I \longrightarrow X$ cammini equivalenti

se $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$
$\alpha(1) = \beta(1) = x_1$





F omotopia tra f e g

Se fisso $\tilde{x}_0$ in $\tilde{X}$ tale che $p(\tilde{X}_0) = x_0$

allora $\exists!\ \tilde{F} : I \times I \longrightarrow \tilde{X}$

e $\tilde{f}(t) := \tilde{F}(0, t)$ sono sollevamenti
$\tilde{g}(t) := \tilde{F}(1, t)$ di f e g

ma osserviamo anche che

$$\underset{\text{connesso}}{I \times \{0\}} \xrightarrow{\tilde{F}} p^{-1}(x_0) \leftarrow \text{discreto}$$

quindi $\tilde{x}_0 = \tilde{F}(s, 0)$

allo stesso modo $\tilde{x}_1 := \mathrm{im}\,(\tilde{F}(*, 1))$

Dunque $\tilde{F}$ è una equivalenza di

cammini
(omotopia rel. a $\{0,1\}$) tra $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$?

Conseguenza importantissima :

Azione di monodromia del gruppo fondamentale di X

$$\begin{array}{c} \tilde{X} \\ \downarrow p \\ X \end{array} \quad \text{rivestimento}$$

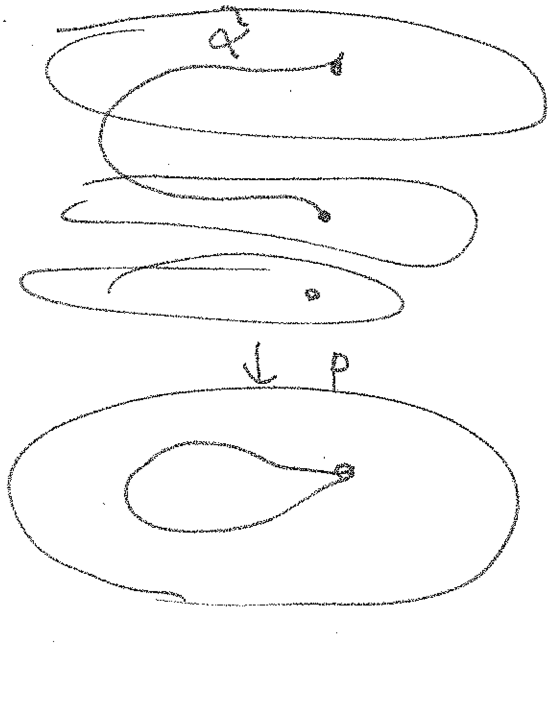
$\forall \ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

allora $\forall \ \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$

posso prendere $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}$ unico sollevamento di α con punto iniziale $\tilde{x}$ (sollevamento cammini)

e $[\tilde{\alpha}]$ è ben definita (sollevamento omotopie)

e dunque è univocamente definito il punto finale $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$



Dunque ho

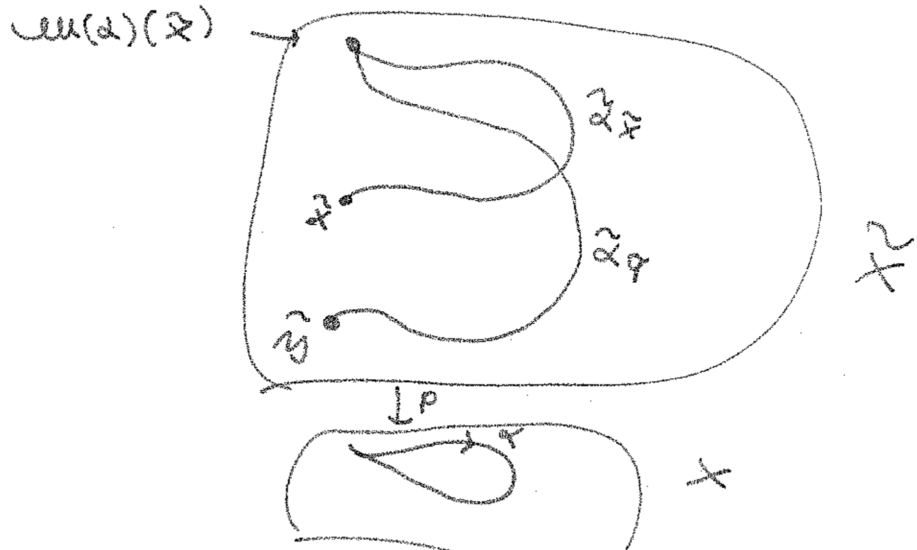
$$\mu : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(p^{-1}(x_0))$$

gruppo degli automorfismi della fibra

un momento, è proprio un automorfismo?
bè sì che lo è:

→ se $m(\alpha)(\tilde{x}) = m(\alpha)(\tilde{y})$

allora vuol dire che



allora $\overline{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}}$ e $\overline{\tilde{\alpha}_{\tilde{y}}}$ sono

due sollevamenti di $\overline{\alpha}$ che partono

dallo stesso punto

$$\tilde{z} = m(\alpha)(\tilde{x}) \ \left(= m(\alpha)(\tilde{y})\right)$$

$\Rightarrow$ coincidono !

Allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} = \tilde{\alpha}_{\tilde{y}}$ e in particolare

$$\tilde{x} = \tilde{y}$$

Quindi $\forall \alpha \quad m(\alpha) : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$

è iniettivo.

Infatti X spazio topologico (qui $p^{-1}(x_0)$ è discreto)
G gruppo

$X \times G \to X$
$(x, g) \mapsto x \cdot g$

tale che (

$\forall g, g' \in H$

$$x \cdot (g \circ g') = (x \cdot g) \cdot g'$$

esattamente quello che abbiamo qui

det
m si chiama mappa di monodromia
l'azione descritta da m si chiama
azione di monodromia di $\pi_1(X, x_0)$
su $p^{-1}(x_0)$

vedremo che

codifica il rivestimento

Proprietà della mappa di monodromia

ES. Se $\tilde{X}$ è connesso per archi

allora $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(x_0)$

$\exists$ α arco in $\tilde{X}$ che li collega

$p \circ \alpha$ è un laccio in X con pto base x_0

e $m(p \circ \alpha)$ manda $\tilde{x}$ in $\tilde{y}$

Dunque l'azione di monodromia è
transitiva !

equivalentemente

se $\tilde{X}$ è connesso per archi allora

$$\forall \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$$

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$$

$$[\alpha] \longmapsto m(\alpha)(\tilde{x})$$

è suriettiva

↓

questa mappa alcuni autori (Munkres ad esempio) la chiamano lifting correspondence

Teo

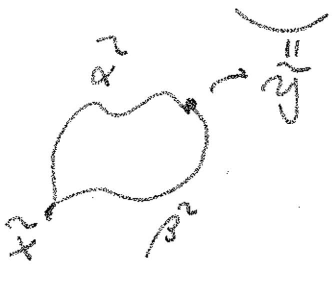
se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso la lifting correspondence è biiettiva:

dim.: manca l'iniettività:

siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$

tali che $m(\alpha)(\tilde{x}) = m(\beta)(\tilde{x})$

allora



ma allora $\tilde{\alpha} * \overline{\tilde{\beta}}$ è un laccio in $\tilde{X}$ (con pto base $\tilde{x}$) ma allora $\tilde{\alpha} * \overline{\tilde{\beta}} \sim \varepsilon_{\tilde{x}}$

$$\Longrightarrow \tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta} \text{ in } \tilde{X}$$

<u>Cor</u>: $\pi_1(S^1, 1) \leftrightarrow \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$
(e poi si vede che è iso)

<u>Teorema</u> Sia $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ rivestimento, $x_0 \in X$
Valgono le seguenti proposizioni: $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

(a) $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$
è iniettivo.

(b) sia $H = p_* \pi_1(\tilde{X}, x_0)$ (che dunque è un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ isomorfo a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$)
La lifting correspondence induce una mappa iniettiva:

$$\pi_1(X, x_0) / H \hookrightarrow p^{-1}(x_0)$$

$\uparrow$

laterali di H
destri
in $\pi_1(X, x_0)$

che è biiettiva se $\tilde{X}$ è cpa

(c) se α è un laccio in X con pto base x_0
allora $[\alpha] \in H$ se e solo se
α si solleva a un <u>laccio</u> con punto base $\tilde{x}_0$

(b) $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$

$$[\gamma] \longmapsto [p \circ \gamma]$$

dunque

$[\alpha] \in p_* \pi_1(\tilde{X}, x_0)$ sse

$\alpha \sim p \circ \gamma$ per un qualche γ laccio in $\tilde{X}$ con pto base $\tilde{x}_0$

<u>chiaro</u>.

(a) $\ker p_* = \{ [\gamma] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \mid p_*[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}] \}$

$= \{ \gamma \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \mid p \circ \gamma \sim \varepsilon_{x_0} \}$

osservo che allora dico che γ è omotopo a un sollevamento di ε_{x_0} con punto base $\tilde{x}_0$

<u>Ma</u> $\varepsilon_{\tilde{x}_0}$ <u>è</u> un sollevamento di ε_{x_0} con punto base x_0: per unicità dei sollevamenti $\gamma \sim \varepsilon_{\tilde{x}_0}$ <u>fin</u>

$\Rightarrow \ker p_* = \{ [\varepsilon_{\tilde{x}_0}] \}$

chiamo M la lifting correspondence

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{M} p^{-1}(x_0)$$

vediamo che

$$M([\alpha]) = M([\beta]) \quad \text{se e solo se}$$

$$[\alpha] \in H[\beta] \qquad \text{con } H = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

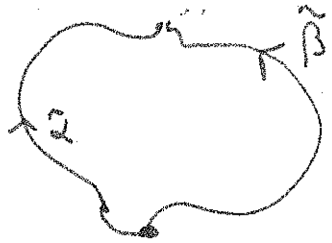
ovvero

$$M[\alpha] = M[\beta] \quad \text{sse} \qquad [\alpha][\beta]^{-1} \in H$$

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(1)$$

ma allora

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0} * \overline{\tilde{\beta}}_{\tilde{x}_0}$$



è un
laccio in $\tilde{X}$
con punto base $\tilde{x}_0$
allora posso osservare che $p \circ (\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0} * \overline{\tilde{\beta}}_{\tilde{x}_0}) =$

$$= \alpha * \overline{\beta} \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$$

che è proprio quello che volevo $\boxtimes$

osservazione importante

In realta' questa proposizione segue direttamente

tranne il punto (c)

dal fatto che abbiamo

un'azione (destra) di $\pi_1(X, x_0)$ su

$p^{-1}(x_0)$

Infatti in generale data un'azione

di gruppo ho che $G \curvearrowright X$

fissato $y \in Y$

$$G \longrightarrow \mathcal{O}(y) \subseteq Y$$

• azione di G transitiva $\iff \forall y \ \varphi_y$ e' suriettiva

• in generale ho appl. indotta

$$G/\mathrm{Stab}(y) \xrightarrow[\sim]{\varphi_y} \mathcal{O}(y) \subseteq Y$$

e dunque tutto il risultato segue

Ora guardiamo ancora un po' di proprietà della mappa di monodromia

$$\rightarrow \quad m : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p^{-1}(x_0))$$

ha senso studiare $\underline{\underline{\ker m}}$

$$\ker m = \left\{ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \text{ tc } \forall \tilde{x} \in p^{-1}(x_0) \quad \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x} \right\}$$

cioè α si solleva a un laccio in $\tilde{X}$

$$= \left\{ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid \forall \tilde{x} \in p^{-1}(x_0) \quad [\alpha] \in p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \right\}$$

$$= \bigcap_{\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)} p_* \pi_1(\tilde{X}, x_0)$$

torneremo tra poco ad un significato più profondo di questa intersezione

$\forall \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$

$$\underline{\mathrm{Stab}(\tilde{x})} = \{ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \text{ tc } \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x} \} =$$

$$= \underline{\underline{p_* \pi_1(\tilde{X}, x_0)}}$$

sono proprio gli stabilizzatori di questa azione !!

ATTENZIONE

D'ora in avanti assumiamo che ogni ricoprimento $p: \tilde{X} \to X$ soddisfi le ipotesi aggiuntive X e $\tilde{X}$ connessi e localmente cpa per archi

RICHIAMO: X localmente cpa

$\forall x \in X$ $\forall N$ intorno di x

$\exists$ $M \subseteq N$ intorno di x con M cpa

es: rette con pendenza razionale è cpa ma non loc. cpa

FATTO importante: se X è loc. cpa allora le sue componenti cpa sono aperte (oltre che chiuse: chiuse lo sono sempre)

dim. sia $x \in C$ componente cpa di X

allora $\exists$ $U \ni x$ aperto e cpa

allora $C \cup U$ è cpa e $\supseteq C$

$\Rightarrow$ $C \cup U = C$ $\Rightarrow$ $U \subseteq C$

in effetti basta la proprietà: ogni punto possiede un intorno connesso (che è equivalente ad apertura delle

ES connesso + loc. cpa $\Rightarrow$ cpa

sia C una componente cpa di X.

Voglio vedere che $C = X$

C è aperta, chiusa e non vuota per quanto osservato prima $\underset{X \text{ connesso.}}{\Rightarrow}$ $C = X$ fine

osservazioni importanti

1) X localmente cpa $\Leftrightarrow$ $\tilde{X}$ localmente cpa

2) [questa osservazione ci dice che non è restrittivo chiedere $\tilde{X}$ cpa se vogliamo classificare tutti i rivestimenti di uno spazio X cpa e loc. cpa]

Sia X cpa e loc cpa

allora $\forall\, C \subseteq \tilde{X}$ componente cpa

$p(C) = X$ Infatti $p(C)$ è aperto perché C è aperta e p è una mappa aperta.

D'altra parte, sia $\bar{x} \in \overline{p(C)}$ (voglio $\bar{x} \in p(C)$)

sia $U \ni x$ intorno aperto di x cpa e uniformemente rivestito da p

Allora prendo $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup V_\alpha$ $\quad \mathcal{U} \cap p(C) \neq \emptyset$

$\exists$ α tale che $V_\alpha \cap C \neq \emptyset$

ma $p_{|V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}$ è omeomorfismo,

dunque $\exists$ $\tilde{x} \in V_\alpha$ tale che $p(\tilde{x}) = \overline{x}$

$V_{\bar{\alpha}}$ è cpa perché $\mathcal{U}$ lo è, e $V_{\bar{\alpha}} \cap C \neq \emptyset$

allora $\underset{\tilde{x}\in}{} V_{\bar{\alpha}} \subseteq C$

allora $\overline{x} \in p(V_{\bar{\alpha}}) = \mathcal{U} \subseteq p(C)$ $\boxed{\text{OK}}$

<u>OSS</u>: $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$f : Y \to X$
mappa continua che possiede un sollevamento ad $\tilde{X}$

considero il diagramma commutativo (per funtorialità) di gruppi fondamentali: $y_0 \in Y$ $\quad x_0 := f(y_0)$
$\tilde{x}_0 := \tilde{f}(y_0) \in p^{-1}(x_0)$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "\tilde{f}_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

allora $f_* \pi_1(Y, y_0) = (p_* \circ \tilde{f}_*) \pi_1(Y, y_0)$

$\subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

ora vediamo che questo condizione è anche
sufficiente per il sollevamento di f

Lemma di sollevamento delle mappe

Con le ipotesi precedenti, cioè

$p: \tilde{X} \longrightarrow X$ rivestimento, $x_0 \in X$ $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

$f: Y \longrightarrow X$ appl. continua con $y_0 \in Y$ tc $f(y_0) = x_0$

con Y cpa e loc cpa

allora $\exists$ sollevamento $\tilde{f}: Y \longrightarrow \tilde{X}$ di f

tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$

se e solo se

$$\boxed{f_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$$

Inoltre tale sollevamento, se esiste, è unico.

OSS. Confronto con sollevamento dell'omotopia

Abbiamo
$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f_0} & \tilde{X} \\ \cap & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow[F]{} & X \end{array}$$

omotopia tra f_0 e f_1

tale che $\exists$ $\tilde{f}_0: Z \longrightarrow \tilde{X}$ sollevamento di f_0

$\leadsto$ $\exists$ $\tilde{F}$ sollevamento di F

prendo z_0 tc $f_0(z_0) = x_0$

guardiamo $F_* \pi_1(Z \times I, (z_0, 0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$

so che per OSS (condizione necessaria)

siccome f_0 si solleva

$f_{0*} \pi_1(Z, z_0) \subseteq p_* \pi_1(X, x_0)$

ma riguardiamo il diagramma lì sopra:

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook, "i"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

è commutativo : $p \circ \tilde{f}_0 = f_0 = F_{|Z \times \{0\}}$ $\boxed{\text{OK}}$

allora lo è quello sui gruppi fondamentali:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Z \times \{0\}, (z_0,0)) \arrow[r, "\tilde{f}_{0*}"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Z \times I, (z_0,0)) \arrow[r, "F_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

inoltre i_* è isomorfismo

allora

($Z \times \{0\}$ è retratto (forte) di deformazione di $Z \times I$)

$F_*(\pi_1(Z \times I, (z_0,0)))$

$\|$

$F_*(i_*(\pi_1(Z \times \{0\}, (z_0,0)))) =$

$= p_*(\tilde{f}_{0*}\, \pi_1(Z \times \{0\}, (z_0,0))) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

Dunque $\boxed{\text{nel caso cpa e loc cpa}}$

ie teo di sollevamento delle omotopie segue da questo lem

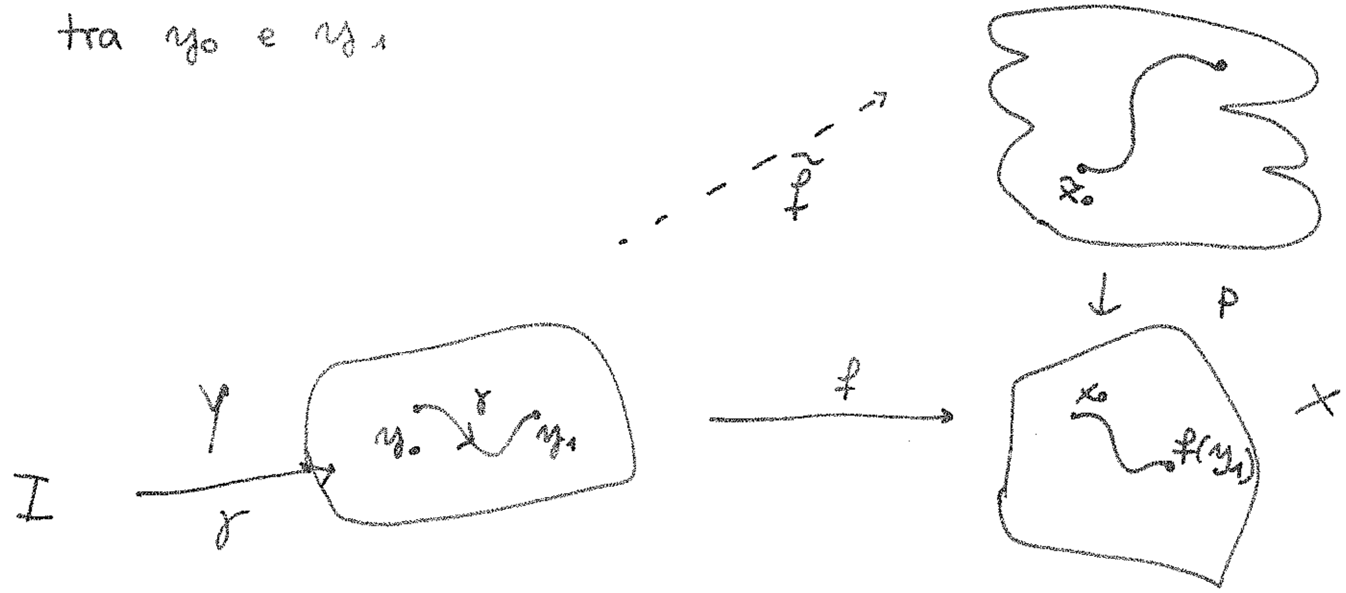
Dimostrazione del teorema di sollevamento

- che sia una condizione necessaria l'abbiamo visto nell'osservazione precedente al Lemma.
- dimostriamo che se $\tilde{f}$ esiste è unica: questo ci darà delle idee su come definirlo.

Sia $y_1 \in Y$ qualunque.

sia γ un cammino in Y (Y lo prendiamo cpa)

tra y_0 e y_1



allora se prendo $\tilde{f} \circ \gamma$ questo è

un sollevamento di γ con pto di partenza $\tilde{x}_0$

$\Longrightarrow$ è unico e il suo punto <u>finale</u>

è $\tilde{f}(y_1)$ che è univocamente determinato

per sollevamento di cammini

- ora vediamo che $\tilde{f}$ esiste, usando l'idea che ci è venuta nel primo punto.

siano $y_1 \in Y$ e γ come prima

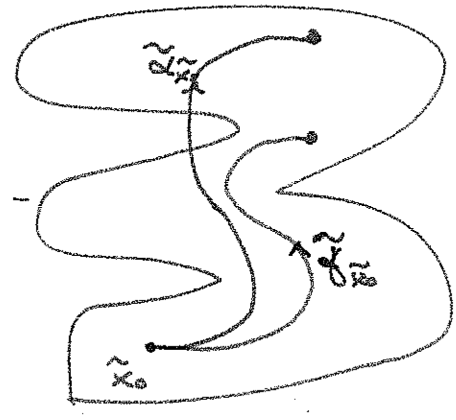
prendo $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}$ sollevamento di γ con pto di partenza $\tilde{x}_0$

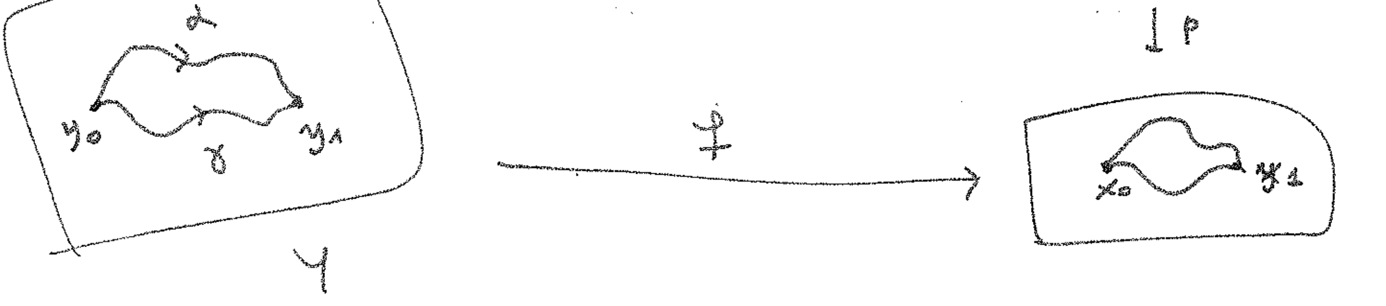
e pongo $\tilde{f}(y_1) := \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1)$ il suo punto finale

→ vediamo che $\tilde{f}$ è ben definito,

cioè che dato un altro cammino α tra y_0 e y_1 in Y

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1)$$





Qui ci servirà l'ipotesi di inclusione
considero

$[\gamma * \bar{\alpha}] \in \pi_1(Y, y_0)$

allora $\quad f_*[\gamma * \bar{\alpha}] \in p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

cioè si solleva a un laccio in $\tilde{X}, \tilde{x}_0$

$\Rightarrow \quad \exists \quad \beta$ laccio in $\tilde{X}$ con pto base $\tilde{x}_0$

t.c. $\quad p \circ \beta = \gamma * \bar{\alpha}$

ma allora $\quad \beta = \widetilde{(\gamma * \bar{\alpha})}_{\tilde{x}_0} =$

$$= \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} * \tilde{\bar{\alpha}}_{\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1)}$$

solita
solfa

e allora $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$!

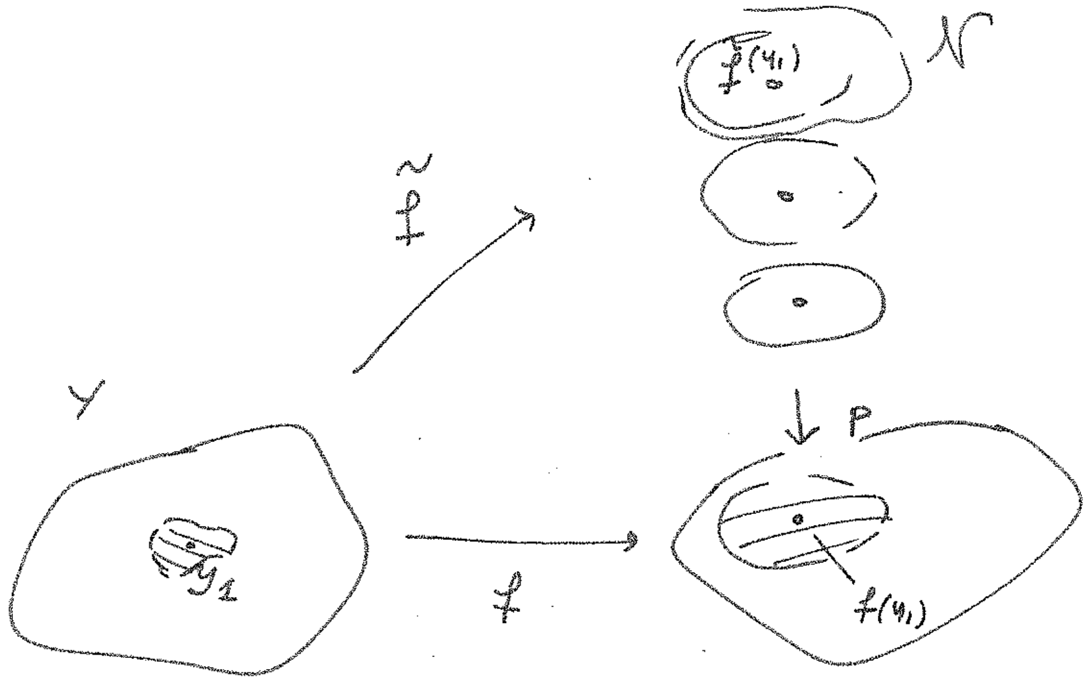
→ ora vediamo che $\tilde{f}$ così definita è
<u>continua</u> (questo è più facile ma va fatto)

sia $y_1 \in Y$ $\quad$ Sia $\mathcal{N}$ intorno di $\tilde{f}(y_1)$

cerco $\mathcal{W}$ intorno di y_1 tale che

$$\tilde{f}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{N}$$

Sia $\mathcal{U} \ni f(y_1)$ aperto cpa uniformemente rivestito da p



sia $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup V_\alpha$ sia $V_{\bar{\alpha}}$ tale che $\tilde{f}(y_1) \in V_{\bar{\alpha}}$

prendo
$$\begin{array}{c} V_{\bar{\alpha}} \cap \mathcal{N} \ni \tilde{f}(y_1) \\ \cup\!\shortmid \\ V' \text{ cpa} \\ \Downarrow \\ \tilde{f}(y_1) \end{array}$$

allora $p|_{V'} : V' \longrightarrow p(V')$ è omeomorfismo

f continua: $f^{-1}(p(V'))$ aperto in Y

allora $\underbrace{W}_{}$ (intornoaperto cpa di y_1)

dico che $\tilde{f}(W) \subseteq \mathcal{N}$

allora voglio vedere che

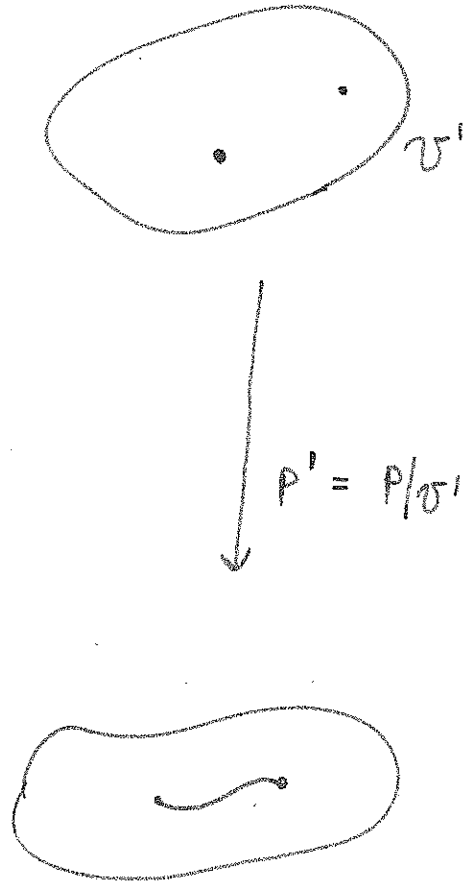
$$\tilde{f}(W) \subseteq V'$$

vediamo: sia $y \in W$

sia η cammino in W tra y_1 e y

$$\tilde{f}(y) = \widetilde{\left(f\circ(\alpha * \eta)\right)}_{x_0}(1) =$$

$$= \widetilde{(f\circ\alpha)}_{x_0} * \widetilde{(f\circ\eta)}_{\tilde{f}(y_1)}(1)$$



ma se prendo

$$(p')^{-1}\circ(f\circ\eta)_{\tilde{f}(y_1)}$$

<u>questo è</u>

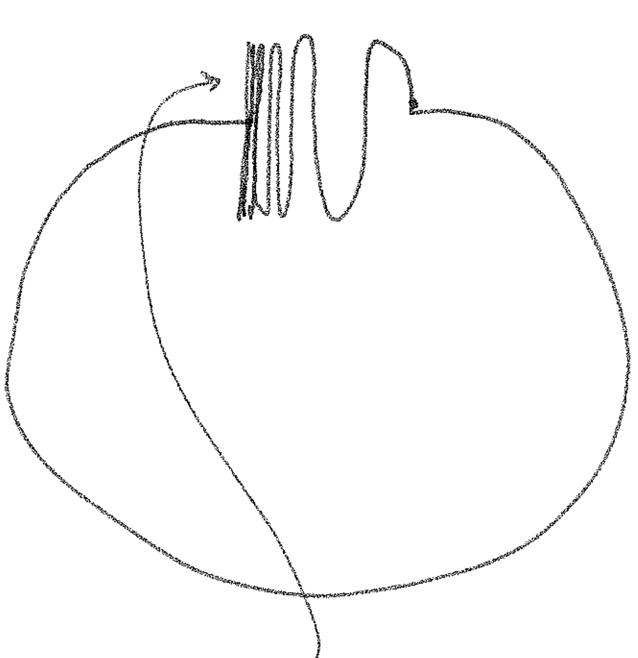
$$\widetilde{f\circ\eta}_{\tilde{f}(y_1)}$$

quindi il suo punto finale ($\tilde{f}(y)$) sta in V'!

⊠

<u>OSS</u>: È proprio necessario supporre che sia localmente cpa? Sì!

controesempio (Manetti es 7 pag 80)



X siffatto è cpa ma non loc cpa

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{contrazione segmento}"] \arrow[dr, "\not\exists \text{ sollevamento}"'] & S^1 \\ & \mathbb{R} \arrow[u, "e"'] \end{tikzcd}$$

→ questa è una applicazione continua ben definita che <u>non</u> ammette sollevamento ad $\mathbb{R}$

<u>Lo lascio per esercizio</u>

Def. <u>Equivalenza di Rivestimenti</u>

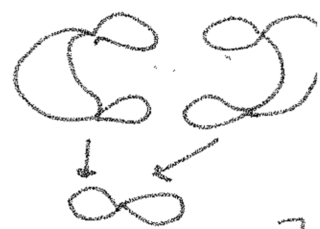
$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

sia X sp top e $p_i : \widetilde{X}_i \longrightarrow X$ due rivestimenti.

un' equivalenza (di rivestimenti) tra p_1 e p_2 è $\varphi : \widetilde{X}_1 \longrightarrow \widetilde{X}_2$ omeomorfismo tale che il diagramma commuta, ovvero

$$\boxed{p_2 \circ \varphi = p_1}$$

idea



come rivestimenti NON solo equivalenti

vogliamo

<u>classificare i rivestimenti a meno di equivalenza</u> (di rivestimenti)

Cominciamo:

Teo (79.[illegible])

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

due rivestimenti.

sia $\tilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$

$\exists$ un' equivalenza $\varphi : \widetilde{X}_1 \longrightarrow \widetilde{X}_2$ tc $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$

se e solo se

$$\boxed{p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)}$$

inoltre, se φ esiste, è unica.

__dim__ se φ esiste allora ho

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$$

$$\parallel$$

$$p_{2*}(\varphi_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$$

$$\subseteq$$

$$\pi_1(\tilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1)) \qquad \boxed{OK}$$

ora

assumo che $\quad p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$

allora

per sollevamento $\exists!\ \varphi$ che solleva p_1 a p_2

ed $\exists!\ \psi$ che solleva p_2 a p_1

allora

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[ll, bend left, "\psi"] \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

se prendo

$\psi \circ \varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$

questo è tale che

$p_1(\psi \circ \varphi(\tilde{x})) = p_1(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}_1$

Ma allora $\psi \circ \varphi$ è sollevamento di p_1 tramite p_1

ma $id_{\tilde{X}_1}$ è un tale sollevamento: $\psi \circ \varphi = id_{\tilde{X}_1}$!

e lo stesso vale per $\varphi \circ \psi$!

Lemma Sia $p: \tilde{X} \to X$ un rivestimento

$x_0 \in X$ $\quad \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ $\quad$ e $\forall \tilde{x}_i \in p^{-1}(x_0)$

chiamo $H_i := p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i)$

sia $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$

(a) sia γ cammino in $\tilde{X}$ con $\gamma(0) = \tilde{x}_0$ e $\gamma(1) = \tilde{x}_1$

allora ovviamente $p \circ \gamma$ è un laccio

e $[p\circ\gamma]\, H_1\, [p\circ\gamma]^{-1} = H_0$

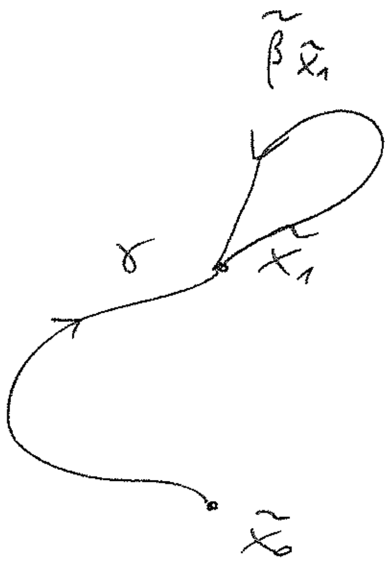
(b) Se $H < \pi_1(X, x_0)$ è un sottogruppo coniugato ad H_0 $\exists\ \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$

tale che $H = H_1$

dim:

(a) vediamo che

$[p\circ\gamma]\, H_1\, [p\circ\gamma]^{-1} \subseteq H_0$

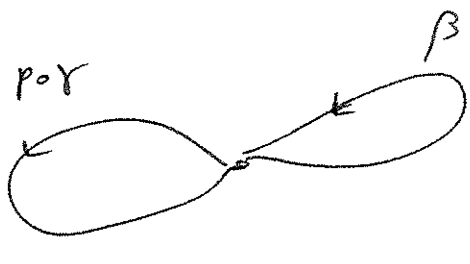


sia $\beta \in H_1$

$\exists\ \tilde{\beta}_{\tilde{x}_1}$ sollevamento

che è un loop perché

$\beta \in H_1$



allora

$(p\circ\gamma) * \beta * \overline{(p\circ\gamma)}$ ha come sollevamento

$\gamma * \tilde{\beta}_{\tilde{x}_1} * \overline{\gamma}$ che è loop con pto base $\tilde{x}_0$

Dunque $\quad (p\circ\gamma) * \beta (p\circ\gamma)^{-1} \in H_0$

viceversa per quanto appena verificato

$$[\overline{p\circ\gamma}]\, H_0\, [p\circ\gamma] \subseteq H_1$$

$$\overset{\shortparallel}{[\overline{p\circ\gamma}]^{-1}}$$

e dunque abbiamo

$$H_0 \subseteq [p\circ\gamma]\, H_1\, [p\circ\gamma]^{-1} \quad \underline{ok}$$

(b) se $\quad H = [\alpha]\, H_0\, [\alpha]^{-1}$ per un qualche $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

prendo $\widetilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ e pongo $\tilde{x}_1 := \widetilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$

allora $\widetilde{\alpha}_{x_1}$ è cammino tra $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_0$

e ho finito per il punto (a) $\boxtimes$

<u>OSS</u>: Non è peregrino porsi la seguente domanda: se H_0 è coniugato di H_1 (con le notazioni precedenti) allora $\exists\, \gamma$ in $\tilde{X}$ cammino tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$ tale che

$$[p\circ\gamma]\, H_1\, [p\circ\gamma]^{-1} = H_0 \quad ???$$

La risposta a questa domanda è in generale no!

Sia

H_0 coniugato ad H_1

$[\alpha] H_0 [\alpha]^{-1} = H_1$

allora questo mi dice che se prendo

$\tilde{x}_2 := \tilde{\alpha}\,\tilde{x}_1$ allora $H_0 = H_2$

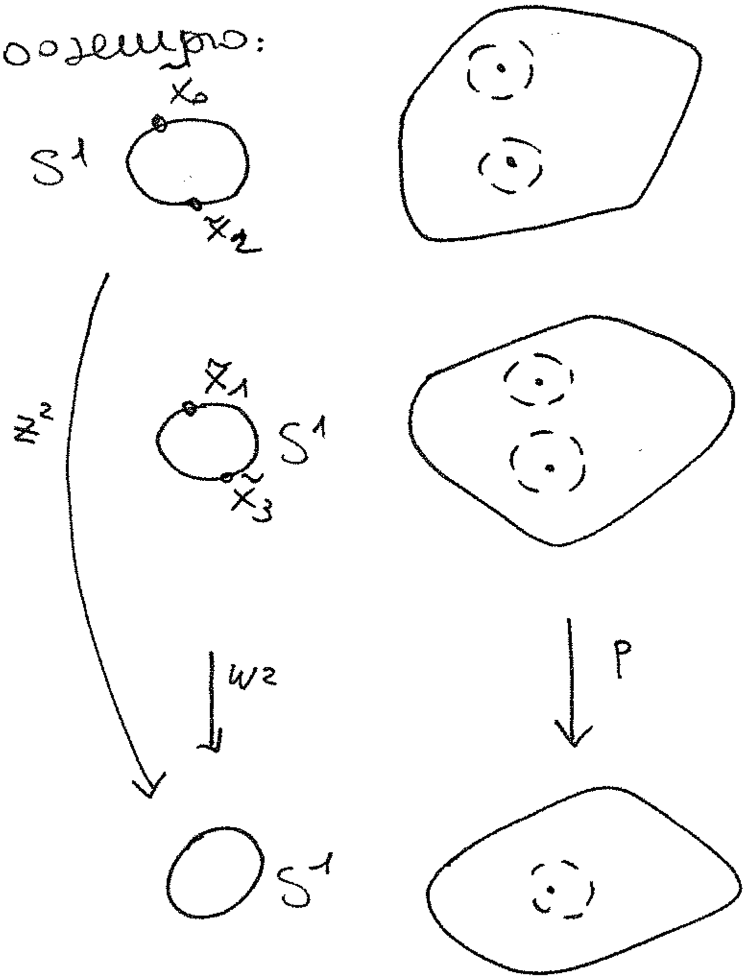
e $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}$ è un cammino in $\tilde{X}$ tra $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$

Dunque c'è un' equivalenza di rivestimenti

tra $(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ e $(\tilde{X}, \tilde{x}_2)$

Ma non è detto che ci sia un cammino in $\tilde{X}$ tra $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_0$.

controesempio:



$\tilde{X} = S^1 \sqcup S^1$

$X = S^1$

allora

sono proprio uguali

$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = 2\mathbb{Z} \subseteq \pi_1(X, x_0)$

però chiaramente $\nexists\ \gamma$ cammino in $\tilde{X}$ tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$

(mentre c'è tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_2$) e tra ...

OSS

Dunque, se il rivestimento è connesso per archi, allora $\forall x_0 \in X$

$\forall\ \tilde{x}_i \in p^{-1}(x_0)$ gli H_i stanno tutti nella stessa classe di coniugio, ed ogni elemento nella classe di coniugio di un H_i è della forma H_J per qualche J.

Teo Sia $p_0 : \tilde{X}_0 \longrightarrow X$, $\tilde{x}_0 \in p_0^{-1}(x_0)$, $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$
siano $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$
rivestimenti. p_1 e p_2 sono equivalenti se e solo se i sottogruppi

$$p_{0*}\pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \quad e \quad p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$$

sono coniugati.

dim: si tratta solo di mettere insieme i due risultati precedenti.

Esempio: classificazione dei rivestimenti di S^1:

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$$

dunque tutti i sottogruppi sono normali e due rivestimenti

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[dr, "p_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

sono equivalenti sse i sottogruppi associati coincidono.

I sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono $n\mathbb{Z}$ e $\{0\}$

$\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ ho $p_n : S^1 \longrightarrow S^1$

$$z \longmapsto z^n$$
$$e^{i2\pi\vartheta} \longmapsto e^{i2\pi n\vartheta}$$

e già abbiamo verificato che

$p_{n*}\pi_1(S^1, 1) = n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

Inoltre ho $e: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ mappa esponenziale

e ovviamente $e_*\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$

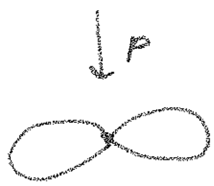
Dunque questi sono tutti e soli i <u>rivestimenti</u> di S^1 a meno di equivalenze! ▷ <u>connessi</u>

<u>Esempio 2</u>

I rivestimenti di ∞ ?

$\boxed{??}$ Volevamo classificare quelli di grado 2

cosa possiamo fare?



se prendo un riv. di grado 2
Se mi restringo a una delle circonferenze C e prendo $p^{-1}(C)$
deve essere un rivestimento (magari non connesso) di C

Ma allora le possibilità (a meno di ~~omeo~~ equivalenze) sono tutte e sole quelle che avevamo elencato!

<u>ES$_1$</u>: Classificate i rivestimenti di grado 3 di ∞

57

Esempio 3 (vedi esercizio §79 del Munkres)

Rivestimenti connessi del toro?

Qui la faccenda è più semplice perché

$\pi_1(T, (1,1)) \cong \pi_1(S^1, 1) \times \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$T \approx S^1 \times S^1$ sottogruppi di $\mathbb{Z}^2$:

Sia H sottogruppo di $\mathbb{Z}^2$

$H \cap (\mathbb{Z} \times \{0\}) = H_1 \cong n\mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}$

$H \cap (\{0\} \times \mathbb{Z}) = H_2 \cong m\mathbb{Z} \quad m \in \mathbb{N}$

allora $H = n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z} = \langle (n,0), (0,m) \rangle$

infatti

se $m = n = 0$ allora devo avere $\pi_1(\tilde{X})$ banale: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $(s,t) \mapsto (e(s), e(t))$

sia ora $m = 0$ e $n \neq 0$ $H = n\mathbb{Z} \times \{0\} = \langle (n,0) \rangle$

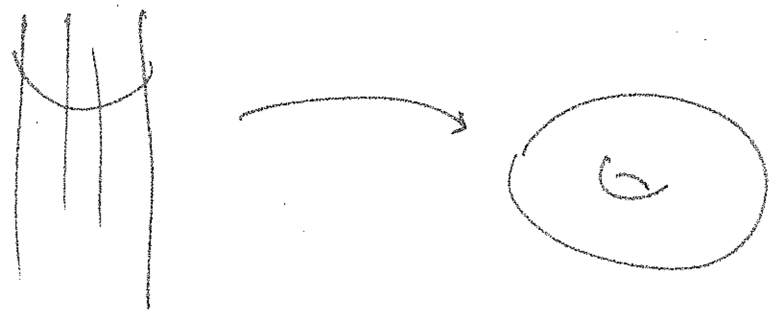
Come posso costruire un rivestimento di $S^1 \times S^1$ con questo come sottogruppo?

$S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$

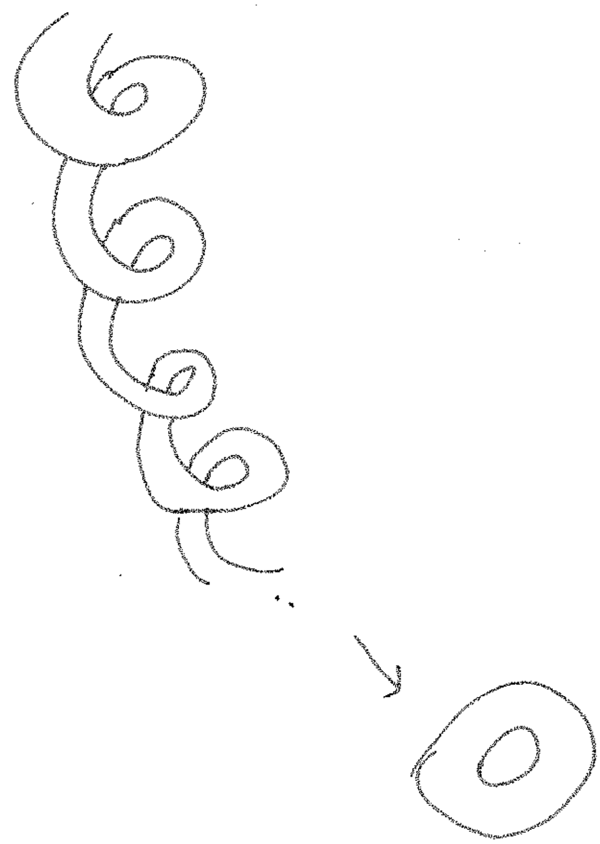
$(s, r) \longmapsto (p_n(s), e(r))$

verificate che funziona

disegno:



ovvero



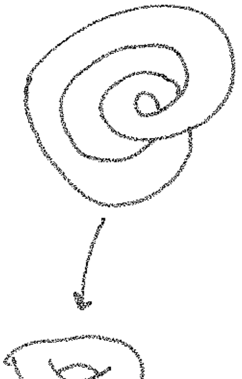
Analogo per $n=0$ $m\neq 0$

invece se $m\neq 0$ e $n\neq 0$

prendo $S^1\times S^1 \longrightarrow S^1\times S^1$

con $(s,t)\longmapsto (p_n(s), p_m(t))$ ok!

disegno:



OSS : Dunque abbiamo X cpa e loc. cpa

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{rivestimenti} \\ \text{connessi di } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \text{sottogruppi} \\ \text{di } \pi_1(X, x_0) \end{array} \right\}$$

$\longrightarrow$ Diciamo $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con pto base

e abbiamo che

$\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$ sse c'è ~~eq~~ equivalenza tra $(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$

inoltre dimenticando il pto base

$\{$classe equivalenza$\}$ $\longrightarrow$ $\{$classe di coniugio$\}$

e inoltre indice di $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ = **grado del rivestimento**
se $\tilde{X}$ è cpa

Quello che vediamo ora :

→ Sotto opportune ipotesi φ è 1-1

- vedremo che basta vedere che $\exists$ rivestimento corrispondente al stgr banale di $\pi_1(X, x_0)$ (rivestimento universale)

e allora abbiamo equivalenza di categorie (corrispondenza di Galois ~~tra~~ per i rivestimenti)

→ vediamo che significato hanno i sottogruppi normali

Gruppo di trasformazioni del rivestimento

$$\begin{array}{ll} \tilde{X} & \text{rivestimento} \\ \downarrow p & \\ X & \end{array}$$

$$\boxed{G(\tilde{X}) := \left\{ \varphi : \tilde{X} \to \tilde{X} \text{ equivalenze del rivestimento} \right\}}$$

è gruppo con la composizione.

ovviamente $G(\tilde{X})$ ha un'azione sinistra su $\tilde{X}$

ES: $e : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$

$$G(\mathbb{R}) = \left\{ \text{omeo } \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \text{ tale che } \begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{Z} \\ \forall r \in \mathbb{R} \end{array} \ \varphi(z+r) = \varphi(r) \right\} =$$

$$= \{ \text{traslazioni di } \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$$

PROP. Nelle ipotesi precedenti, $G(\tilde{X})$ agisce in modo pd su $\tilde{X}$

dim. prendo $\tilde{x} \in \tilde{X}$

prendo $\tilde{x} \in V \subseteq \tilde{X}$ tale che $p(V)$

è uniformemente rivestito e cpa

prendo $\varphi \in G(\tilde{X})$ diverso da $id_{\tilde{X}}$

$$p \circ \varphi(V) = p(V)$$

dunque $\varphi(U) \in \bigsqcup V_\alpha = p^{-1}(p(U))$

ma allora $\varphi(V) \subseteq V_\alpha$ per un qualche α

se $\varphi(V) \subseteq V = V_{\alpha_0}$

avrei che $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$

ma allora φ sarebbe un sollevamento di $p\,a\,p$ con $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$

$\Longrightarrow \varphi = id_{\tilde{X}}$ D

$\tilde{X}$ sole

$\boxtimes$

Dunque ho azione p.d. di $G(\tilde{X})$ su $\tilde{X}$

Questo mi dice che

$$\pi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}/G(\tilde{X})$$

è un rivestimento...

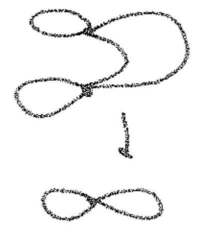
Q: è "il" rivestimento p??

R: no, ma in alcuni casi sì, e possiamo trovare esattamente cos'è.

Esempi

1) $e: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ $\qquad G(e) \cong \mathbb{Z}$

2) $p_n: S^1 \longrightarrow S^1$ $\qquad G(p_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3) 

$p: \tilde{X} \longrightarrow X$ $\qquad G(p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

4) 

Vale che se ho una trasformazione di questo rivestimento devo mandare $\tilde{x}_0$ in <u>sé</u>

$\Rightarrow$ per l'unicità è $id_{\tilde{X}}$

$\Rightarrow$ $G(p) \cong \{ id_{\tilde{X}} \}$

<u>def</u>: un rivestimento si dice <u>normale</u> se $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$

ES

1) il (4) di prima non è normale

2) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento è normale

se $\forall\ \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$

$$p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

def Se un sottogruppo H di un gruppo G non è normale, posso prendere il suo normalizzante

$$N(H) := \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \} = \{ g \in G \mid gH = Hg \}$$

(il più grande sottogruppo di G tale che $H \trianglelefteq N(H)$)

Cor del teo precedente:

3) un rivestimento è regolare o normale se e solo se il gruppo delle trasformazioni del rivestimento agisce transitivamente sulle fibre di p

Ora vediamo che se $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ è un rivestimento

$$G(p) \cong \frac{N(p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{\underbrace{p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}_{H_0 =:}}$$

<u>setting</u>

H_0

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0)/H_0 & \xrightarrow{\ \phi\ } & p^{-1}(x_0) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [\alpha] H_0 & \longmapsto & \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) \end{array}$$

corrispondenza di lifting che essendo $\tilde{X}$ cpa è biiettiva

considero $\varphi \in G(\tilde{X})$: siccome anch'esso definisce un automorfismo di $\tilde{X}$ ⇝ è aut. di <u>$p^{-1}(x_0)$</u>

che commuta con p

ho Ψ che dipende da $\tilde{x}$

$$\begin{array}{ccc} G(p) & \xrightarrow{\ \Psi\ } & p^{-1}(x_0) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ \varphi & \longrightarrow & \varphi(\tilde{x}_0) \end{array}$$

Lemma Nelle notazioni precedenti:

$$\operatorname{im} \Psi = \phi\left(\frac{N(H_0)}{H_0} \right)$$

dim: Sia $\tilde{x}_1 \in \operatorname{im} \Psi \subseteq p^{-1}(x_0)$

Dunque $\exists\ \varphi \in G(p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_0) = x_1$

Siccome ϕ è suriettivo esiste $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $\phi([\alpha]H_0) = \tilde{x}_1$.

Dunque quello che vogliamo è che

$[\alpha] \in N(H_0)$

Siccome $\phi([\alpha]H_0) = \tilde{x}_1$ ho che (per def. di ϕ) $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_1$

Ma allora per quanto verificato precedentemente

$$[\alpha]\, H_0\, [\alpha]^{-1} = H_1 = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$$

Ora, però φ è un sollevamento di p a p con $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ dunque (per teo sollevamento)

$$H_0 = H_1$$

Quindi
$$[\alpha] H_0 [\alpha]^{-1} = H_0$$

Quindi $\quad [\alpha] \in N(H_0) \quad \boxed{\text{ok}}$

Ora consideriamo $\quad \phi^{-1} \circ \psi : G(p) \longrightarrow N(H_0)/H_0$

$$\begin{tikzcd}
 & N(H_0)/H_0 \arrow[dr, "\phi"] & \\
G(p) \arrow[ur] \arrow[rr, "\psi"'] & & p^{-1}(x_0)
\end{tikzcd}$$

Teo

$$\phi^{-1} \circ \psi : G(p) \longrightarrow N(H_0)/H_0$$

è un isomorfismo di gruppi!

dim.

Osserviamo che ψ è iniettiva per teo di sollevamento e unicità del sollev.

Dunque $\phi^{-1} \circ \psi$ è biiettiva.

Ci basta ora verificare che è un omomorfismo di gruppi

Siano φ, η trasformazioni del rivestimento

$$\varphi(\tilde{x}_0) =: \tilde{x}_1$$

$$\eta(\tilde{x}_0) =: \tilde{x}_2$$

voglio vedere che:

$$\phi^{-1}\circ\psi(\underbrace{\varphi\circ\eta}_{\text{composizione in } G(p)}) = \phi^{-1}\circ\psi(\varphi)\cdot\phi\circ\psi(\eta)$$

composizione (prodotto) in $\underbrace{N(H_0)/H_0}_{\text{è gruppo}} \subset \frac{\pi_1(X, x_0)}{H_0}$ ← non è detto che lo sia!

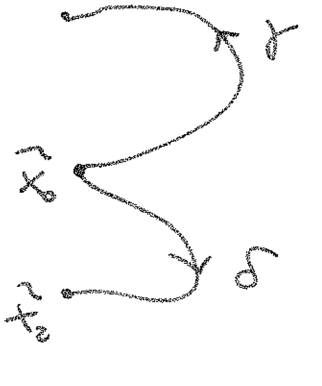
$$\phi^{-1}\circ\psi(\varphi\circ\eta) = ?$$

$$\psi(\varphi\circ\eta) = \varphi(\eta(\tilde{x}_0)) = \varphi(\tilde{x}_1) =: \tilde{x}_3$$

Siano γ e δ cammini in $\tilde{X}$ tra

$\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$

e tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_2$



ora considero $\alpha := p \circ \gamma$ $\quad \beta := p \circ \delta$

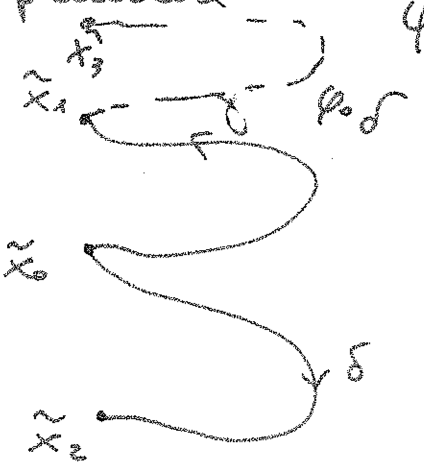
$\phi^{-1}(\psi(\varphi)) = \phi^{-1}(\tilde{x}_1) =: [\alpha] H_0$ $\quad$ (e dunque $[\alpha]$ è tale che $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_1$)

$\phi^{-1}(\psi(\eta)) = \phi^{-1}(\tilde{x}_2) =: [\beta] H_0$ $\quad$ (e $[\beta]$ è tale che $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_2$)

questo è quello che voglio

$$\phi^{-1} \circ \psi(\varphi) \cdot \phi^{-1} \circ \psi(\eta) = [\alpha][\beta] H_0$$

ora γ e δ non sono cammini componibili; ma posso prendere $\varphi \circ \delta$ che va



da $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$

a $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_3$ per def.

e dunque posso prendere

$\gamma * \varphi \circ \delta$ $\quad$ è sollevamento di $\alpha * \beta$ con punto iniziale $\tilde{x}_0$

$$\gamma * \varphi \circ \delta = \widetilde{\alpha * \beta}_{\tilde{x}_0}$$

ma allora

$$\phi([\alpha\beta]H_0) = \widetilde{\alpha*\beta}_{\tilde{x}_0}(1) = \varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_3 \;!$$

come volevamo! $\boxtimes$

COR 1 Se $p: \tilde{X} \to X$ è un rivestimento regolare allora

$(H_0 \triangleleft \pi_1(X,x_0))$ $$\boxed{G(p) \cong \pi_1(X,x_0)/H_0}$$

COR 2 Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, $H_0 = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$

allora $$\boxed{G(p) \cong \pi_1(X,x_0)}$$

Teo Sia Y cpa e localmente cpa

Sia $G < \text{Omeo}(Y)$ (cioè G gruppo che agisce fedelmente a sin. su X)

allora

$\pi : Y \longrightarrow Y/G$ è un rivestimento

se e solo se

G agisce in modo p d su Y

In tal caso, G è il gruppo delle trasformazioni del rivestimento di π, e π è <u>regolare</u>

(quindi vale anche che $G \cong \dfrac{\pi_1(X, x_0)}{H_0}$)

<u>dim.</u>

$\boxed{\Uparrow}$ già visto

$\boxed{\Downarrow}$ per esercizio

Vediamo che se G è gruppo che agisce pd su Y

allora $\begin{array}{l} \vartheta_g : Y \longrightarrow Y \\ \quad\; y \longmapsto g \cdot y \end{array}$ è una trasformazione del rivestimento,

semplicemente perché se ho $y \in Y$ $g \cdot y \in \pi^{-1}\pi(y) = G \cdot y$!
(l'abbiamo già usato un sacco di volte)

d'altra parte considero $\varphi \in G(p)$

prendo $y_0 \in Y$ $\varphi(y_0) \in \pi^{-1}\pi(y_0) = G \cdot y_0$

quindi $\exists g \in G$ tale che $\varphi(y_0) = g \cdot y_0$.

Vediamo che $\varphi = \vartheta_g$

ben è proprio l'unicità del sollevamento: sono entrambi sollevamenti di p con p con y_0 che va in y_1 !

Il fatto che π sia regolare è, come già osservato, equivalente al fatto che $G(p)$ agisce in modo transitivo, ma $G(p) = G$ che agisce pd e pd $\Rightarrow$ transitiva! $\boxtimes$

<u>Teo</u> Sia $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento regolare e $G = G(p)$. Allora esiste un omeomorfismo $k: \tilde{X}/G \longrightarrow X$ tale che il diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ \tilde{X}/G \arrow[rr, "k"'] & {} & X \end{tikzcd}$$

OSS: quindi abbiamo una perfetta corrispondenza tra rivestimenti regolari e rivestimenti indotti da azioni di gruppo (pd).

<u>dim</u>: per esercizio!

ES (Munkres ex 3 pag 491-492)

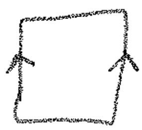
Consideriamo il cilindro $C = S^1 \times I \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad I = [0,1]$

sia $h : C \to C$

C 

$h(x,t) = (-x, \; t)$

$k : C \to C$



$k(x,t) = (-x, 1-t)$

controllate che sono omeomorfismi di C in sè.

ovviamente

$$h \circ h\,(x,t) = h(-x,t) = (x,t)$$

$$k \circ k\,(x,t) = k(-x, 1-t) =$$
$$= (x, 1-(1-t)) = (x,t)$$

dunque sia h sia k hanno ordine 2 in Omeo(C)

e generano sottogruppi di ordine 2

$G_1 = \langle h \rangle \quad G_2 = \langle k \rangle$

$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong$

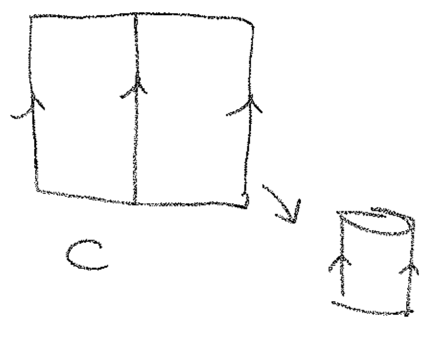
$C \xrightarrow{\pi_1} C/G_1$

$C \xrightarrow{\pi_2} C/G_2$

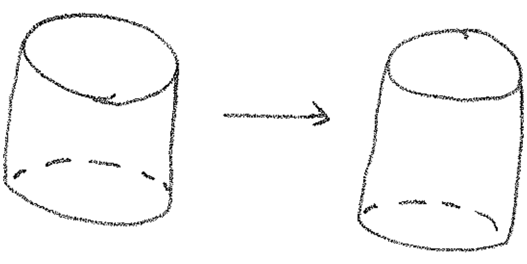
controllate che

$C/G_1 \simeq C$

$C/G_2 \simeq M$ Striscia di Mobius



C



<u>def</u> $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento si dice <u>universale</u> se $\boxed{\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{[e_{\tilde{x}_0}]\}}$

<u>oss</u> riv. universale $\iff$ $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [\varepsilon_{x_0}] \subseteq \pi_1(X, x_0)$

dove $x_0 = p(\tilde{x}_0)$

per i risultati precedenti se

$\tilde{X}_1 \xrightarrow[p_1]{} X$ è un'altro riv. universale

allora

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, shift left, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X} \arrow[ll, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

allora X_1 è equivalente a $\tilde{X}$ (tramite unica equivalenza)

Quindi parliamo <u>del</u> rivestimento universale.

<u>Ora</u>, <u>esempi</u>: $\mathbb{R} \xrightarrow{e} S^1$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow T$

$S^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$

Abbiamo costruito il rivestimento universale della figura a <u>otto</u>

(manetti pag 253)

<u>ESERCIZIO</u> $p: \tilde{X} \to X$ è riv. universale sse l'azione di monodromia è libera e transitiva (Ricordo: transitiva se $\tilde{X}$ conness…

ora

Lemma 1 X cpa e loc cpa (ora lo supponiamo sempre)

sia $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento con $\tilde{X}$ non necessariamente cpa

allora se C è una componente cpa di $\tilde{X}$ allora $p_{|C} : C \to X$ è un rivestimento.

dim Abbiamo dimostrato per esercizio che $p(C) = X$.

ora vediamo che $p_{|C}$ è un rivestimento: dato $x \in X$ prendo $\mathcal{U}$ intorno di x che sia uniformemente rivestito da p e cpa (vogliamo vedere che $\mathcal{U}$ è unif. riv. da $p_{|C}$)

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup V_\alpha$$

e $\forall \alpha$ V_α è cpa. quindi se $V_\alpha \cap C \neq \emptyset$ allora $V_\alpha \subseteq C$

e dunque $\left(\bigsqcup V_\alpha\right) \cap C = \bigsqcup_{\alpha' \in A' \subseteq A} V_{\alpha'}$

ma ancora $p|_{V_{\alpha'}} : V_{\alpha'} \to \mathcal{U}$ è omeo, e dunque $\boxed{\text{ok}}$

Lemma 2

Considero il diagramma commutativo di funzioni continue tra spazi topologici:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "p"'] & \\ & Y \arrow[dl, "r"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

OSS facile:
- se q ed r sono rivestimen allora p lo è!

vale che: (a) se p ed r sono rivestimenti, allora q lo è;

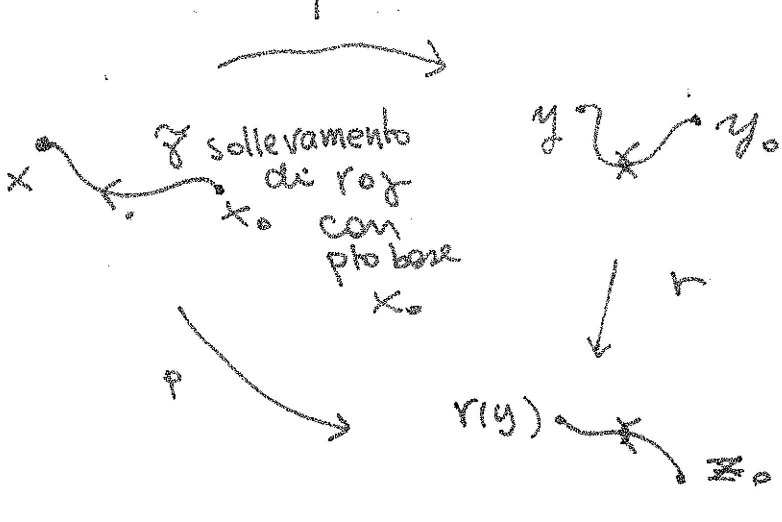
(b) se p e q sono rivestimenti, allora r lo è.

dim. Sia $x_0 \in X$ $\quad y_0 = q(x_0)$ $\quad z_0 = p(x_0)$

(a) siano p ed r rivestimenti.

Vediamo prima di tutto che q e' suriettivo

prendo $y \in Y$ voglio trovare una controimmagine



dico che $q(x) = y$

infatti $p(x) = r(y)$

$$\begin{array}{ccc} p(x) & = & r(y) \\ \| & & \| \\ r(q(x)) & & \end{array}$$

dunque $q(x) \in r^{-1}(r(y))$

no ma $q(x) = y$ per l'unicità del sollevamento

$q(\tilde{\gamma})$ è un sollevamento di $r \circ \gamma$

tramite $r \Rightarrow \boxed{\text{è } \gamma}$? $\boxed{\text{ok}}$

ora vediamo la proprietà di rivestimento

sia $y \in Y$ cerco intorno di y uniformemente rivestito da q

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[dl, "r"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

sia $z := r(y)$

sia $\mathcal{U} \ni z$

intorno unif. $\underline{\text{cpa}}$

riv- da p e da r

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha \qquad r^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\beta \in B} W_\beta$$

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup V_\alpha \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \bigsqcup W_\beta \arrow[dl, "r"] \\ \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

Sia $W_{\bar{\beta}}$ quello che contiene y

Allora $q^{-1}(W_{\bar\beta}) \subseteq p^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$

siano $\alpha' \in A' \subseteq A$ tc $q^{-1}(W_{\bar\beta}) \cap V_{\alpha'} \neq \emptyset$

ovvero che $r|_{W_{\bar\beta}} : W_{\bar\beta} \longrightarrow U$ è omeo

dunque

$$
\begin{tikzcd}
V_{\alpha'} \arrow[r, "q|_{V_{\alpha'}}"] \arrow[d, "p|_{V_{\alpha'}}", "\wr"'] & W_{\bar\beta} \arrow[dl, "r|_{W_{\bar\beta}}", "\wr"'] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

$\Longrightarrow$ $q|_{V_{\alpha'}} : V_{\alpha'} \longrightarrow W_{\bar\beta}$ è omeo

allora ci siamo! $\boxtimes$

(b) Dimostratelo voi per esercizio.

PROPRIETÀ universale del rivestimento universale

Teo $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento con $\tilde{X}$ sempl connesso

$\forall$ rivestimento

$$q: E \to X$$

$\exists$ mappa di rivestimento

$$r: \tilde{X} \to E$$

tale che

il diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "p"'] & \\ & E \arrow[dl, "q"] \\ X & \end{tikzcd}$$

dim: fisso $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ fisso $e_0 \in E$ con $q(e_0) = x_0$

$$p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\} \subseteq q_*(\pi_1(E, e_0))$$

allora $\exists$ r sollevamento di p a q

e per il teorema precedente r è un rivestimento!

Dal pto di vista delle categorie lo vediamo (in soldoni) dopo

Controesempio

l'orecchino infinito non possiede un rivestimento universale

Lemma: Se $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento con $\tilde{X}$ semplicemente connesso

$x_0 \in X$ $\quad \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

Allora $\exists$ un intorno di x_0 tale che $\overset{x_0}{\in} U \overset{i}{\hookrightarrow} X$

$$\pi_1(U, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0)$$

è l'omomorfismo banale

dim.

Infatti: sia $U \ni x_0$ intorno cpa e uniformemente rivestito da p

sia $[\alpha] \in \pi_1(U, x_0)$ $\qquad p^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$

sia $V_{\alpha_0} \ni \tilde{x}_0$ allora α si solleva a

$(p_{|V_{\alpha_0}})^{-1} \circ \alpha$ che è un laccio in $\tilde{X}$ con pto base $\tilde{x}_0$

Ma siccome $\tilde{X}$ è semplicemente connesso

allora
$$\left(p|_{V_{\tilde{x}_0}}^{-1} \circ \alpha\right) \sim \varepsilon_{\tilde{x}_0}$$

allora
$$\alpha \sim \varepsilon_{x_0} \text{ in } X$$

dunque $i_*[\alpha] = [\varepsilon_{x_0}]$ in $\pi_1(X, x_0)$

$\boxtimes$

Esempio dell'orecchino infinito $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

Fatto sia U un intorno che contiene $(0,0) = O$

Allora $i : U \hookrightarrow X$

induce $i_* : \pi_1(U, O) \longrightarrow \pi_1(X, O)$

che non è banale

Sia U intorno, sia n tale che

$C_n \subseteq U$

Allora ovvio che $r_n : X \longrightarrow C_n$

è una retrazione

e dunque

$$\begin{tikzcd} X & \\ & \mathcal{U} \arrow[ul, hook', "i"'] \\ C_n \arrow[uu, bend right, hook, "j"'] \arrow[ur, hook, "k"'] & \end{tikzcd}$$

$$X \xrightarrow{r_n} C_n$$

allora

$$\begin{tikzcd} \pi_1(C_n, 0) \arrow[r, "k_*"'] \arrow[rr, bend right, "j_* \text{ iniettivo}"'] & \pi_1(\mathcal{U}, 0) \arrow[r, "i_*"'] & \pi_1(X, 0) \end{tikzcd}$$

<u>allora</u> in particolare i_* non è

<u>l'omomorfismo nullo</u>

Sia X spazio topologico. Dico che

X è semi-localmente-semplicemente connesso (slsc)

se $\forall x \in X$ $\exists$ intorno U di x tale che

- U cpa
- $i : U \hookrightarrow X$ è tale che

$$i_* : \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

è l'omomorfismo banale.

Esempi:

1) una varietà di dim n è slsc

2) Qualunque spazio localmente sempl. connesso

(cioè tale che $\forall x \in X$ $\forall N$ intorno di x $\exists U \ni x$ intorno t.c. $U \subseteq N$ e U è s.c.)

3) semplicemente connesso $\Rightarrow$ slsc (chiaro)

4) L'orecchino infinito non è slsc

5) (esempio 2 pag 499 Munkres) Cono sull'orecchino infinito, che è semplicemente connesso, ma non loc. s.c. (dunque s.l.s.c)

Lemma

Se X possiede un rivestimento universale, (il)
X è slsc.

dim

Sia $\begin{array}{c}\tilde{X}\\ \downarrow p\\ X\end{array}$ rivestimento universale. Sia $x_0 \in X$

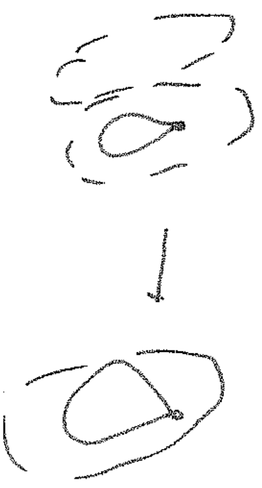
Ho che $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{[\varepsilon_{\tilde{x}}]\}$

Sia U intorno unif. rivestito di x_0

prendo α loop in U con punto base x_0

sia $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$

sia $V_{\alpha_0} \ni \tilde{x}_0$



α si solleva a un loop

in V_{α_0} $\quad \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$

ma $\tilde{X}$ è sempl. connesso:

allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0} \sim \varepsilon_{\tilde{x}_0}$ in $\tilde{X}$

dunque $\underbrace{p \circ \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}}_{= \alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$ in X

Dunque abbiamo proprio che

$i_* : \pi_1(U, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo banale

$\underset{\text{come loop in } U}{[\alpha]} \longmapsto [\alpha]_X$ come loop in X ☒

TEO X cpa e loc cpa possiede un rivestimento universale se e solo se è semi-localmente semplicemente connesso

dim (idea)

OSS (già fatta)

se $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ è riv. universale, fissati $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

$\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$

$\exists!$ classe di equivalenza di cammini tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}$

pti di $\tilde{X}$ $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ classi di equivalenza di cammini con pto di partenza fissato $\tilde{x}_0$

questo ci dà l'idea di come definire $\tilde{X}$ a partire da X

perché d'altra parte

γ cammino tra $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}$ $\quad \widetilde{p \circ \gamma}_{\tilde{x}_0}$ ← unico sollevamento!

Dunque

$$\widetilde{X} := \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{classe di equivalenza}}}{[\gamma]} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{cammino in } X \\ \text{con } \gamma(0) = x_0 \end{array} \right\}$$

e definisco

$$\begin{aligned} p: \widetilde{X} &\longrightarrow X \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

è ben definita perché pto finale non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza (equiv = omot. relativa a $\{0,1\}$)

ed è suriettiva perché X è <u>cpa</u>

Dobbiamo definire una opportuna topologia su $\widetilde{X}$.

Definiamo questa famiglia <u>IN</u> X

$$\mathcal{B} := \left\{ \mathcal{U} \begin{array}{l} \text{aperto} \\ \text{cpa} \end{array} \text{ in } X \text{ tc } \underset{\forall x \in \mathcal{U}}{\pi_1(\mathcal{U}, x)} \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x) \text{ è \underline{nulla}} \right\}$$

siccome

X è cpa e slsc, questa è una <u>base</u> per la topologia di X ! (verifiche a loro)

<u>OSS</u>: Dato $x_1 \in X$

$$p^{-1}(x_1) = \left\{ [\gamma] \ \begin{array}{l}\text{classi di cammini}\\ \text{in } X \text{ con pto di}\\ \text{partenza } x_0\end{array} \ \text{tc } \gamma(1) = x_1 \right\}$$

$$p^{-1}(x_0) = \left\{ [\gamma] \quad " \quad \text{tc } \gamma(1) = x_0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l}\text{classi di}\\ \text{lacci in } X \text{ con punto base } x_0\end{array} \right\} =$$

$$= \pi_1 (X, x_0) \quad \text{come } \underline{\text{deve essere}}$$

ora, se prendo $\mathcal{U}$ aperto in B

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \left\{ [\gamma], \ \gamma \ \begin{array}{l}\text{cammino in } X\\ \text{con pto part. } x_0\end{array} \ \text{e } \gamma(1) \in \mathcal{U} \right\}$$

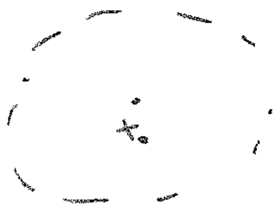
<u>FISSO</u> $[\gamma_0] \in p^{-1}(x_0)$

↑ che corrisponde alla <u>fibre</u> ricordiamocelo

allora $\forall x \in \mathcal{U}$ ho η cammino in $\mathcal{U}$ tra x_0 e x

<u>dico</u> che e $\gamma * \eta$ è cammino tra x_0 e x anche lui

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\substack{[\gamma] \in p^{-1}(x_0) \\ [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)}} \left\{ [\gamma * \eta] \ \forall \ \eta \ \begin{array}{l}\text{con pto finale } x\\ \text{comm. in } \mathcal{U} \text{ con}\\ \eta(0) = x_0\end{array} \right\}$$



(*)

Questo ci dice che dobbiamo definire la topologia di $\tilde{X}$ in modo che $p|$ quelle robe lì sia omeo.

(*) verifichiamo:

sia $\mathcal{U}_{[\gamma]} = \left\{ [\gamma * \eta] \quad \eta \text{ cammino in } \mathcal{U} \text{ tra } x_0 \text{ e } x \right\}$

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{B}$

$\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ dato $[\delta] \neq [\gamma]$ in $\pi_1(X, x_0)$

$\mathcal{U}_{[\gamma]} \cap \mathcal{U}_{[\delta]}$

$\Downarrow$

[cammino] → se c'è qualcosa qui ho che $\exists\, \eta, \eta'$ tali che cammini in $\mathcal{U}$ tra x_0 e x

$\gamma * \eta \sim \delta * \eta'$ in X

e allora $\gamma \sim \delta * \underbrace{\eta' * \bar{\eta}}$ in X

laccio in $\mathcal{U}$ con pto base x

ma siccome $\mathcal{U}$ è tale che i_* è banale allora

$\underline{\eta' * \bar{\eta} \sim \varepsilon_x \text{ in } X}$

quindi $\gamma \sim \delta$ <u>Assurdo</u>

Allo stesso modo si vede che

$$p_{|\mathcal{U}_{[\gamma]}} : \mathcal{U}_{[\gamma]} \longrightarrow \mathcal{U}$$

è <u>biiettivo</u>: è suriettivo perché $\mathcal{U}$ è cpa

è iniettivo perché i_* è <u>nullo</u>

Ora verifichiamo che

$$\tilde{\mathcal{B}} := \left\{ \mathcal{U}_{[\gamma]} \;\middle|\; \mathcal{U} \in \mathcal{B} \quad \gamma \text{ cammino in } X \text{ con } \gamma(0)=x_0 \text{ e } \gamma(1) \in \mathcal{U} \right\}$$

è una base per una topologia su $\tilde{X}$

con il <u>lemma della base</u>

ovviamente $\bigcup_{\substack{\mathcal{U}\in\mathcal{B} \\ \gamma \dots}} \mathcal{U}_{[\gamma]} = \tilde{X}$

Siano ora $\mathcal{U}_{[\gamma]} \quad \mathcal{V}_{[\delta]} \in \tilde{\mathcal{B}}$

Supponiamo che $\mathcal{U}_{[\gamma]} \cap \mathcal{V}_{[\delta]} \neq \emptyset$

allora $\exists\ \eta, \eta'$ tali che
cammini in $\mathcal{U}$ e in $\mathcal{V}$

$$[\gamma * \eta] = [\delta * \eta'] \to \text{in } X$$

ma allora $\gamma \sim \delta * \eta' * \bar{\eta}$ ma questo cosa mi dice ?

Bè so che $\eta(1) = \eta'(1) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

dunque $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$

e ora $\boxed{\text{dico che}}$ $\exists\ \mathcal{W}$ cpa e tc i_* è banale ($\mathcal{W} \in \mathcal{B}$)

ES verificarlo

tale che $\eta(1) = \eta'(1) \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

e vale che $\mathcal{W}_{[\gamma]} = \mathcal{W}_{[\delta]}$

e quindi $\mathcal{W}_{[\gamma]} \subseteq \mathcal{U}_{[\gamma]}$
$\mathcal{W}_{[\delta]} \subseteq \mathcal{V}_{[\delta]}$ } chiaro!

e quindi

$$\mathcal{W}_{[\gamma]} \subseteq \mathcal{U}_{[\gamma]} \cap \mathcal{V}_{[\delta]}$$

Quindi abbiamo il lemma delle basi!

Quindi abbiamo una topologia ben definita su $\widetilde{X}$ e lascio a voi che
(ma è chiaro da quanto fatto)

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)} \mathcal{U}_{[\gamma]}$$

e $\forall\ [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ $\quad p_{|\mathcal{U}_{[\gamma]}} : \mathcal{U}_{[\gamma]} \longrightarrow \mathcal{U}$ è un omeomorfismo

Resta da verificare che con tale topologia $\widetilde{X}$ sia semplicemente connesso:

Sia $[\varepsilon_{x_0}] \in \widetilde{X}$ la classe di ε_{x_0}

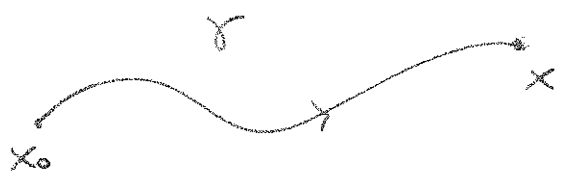
vediamo che

$$p_* \pi_1(\widetilde{X}, [\varepsilon_{x_0}]) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$$

tanto p_* è iniettiva perché sappiamo che p è un rivestimento.

Ma prima:

- $\tilde{X}$ è cpa: Sia $[\gamma] \in \tilde{X}$ qualunque elemento quindi γ è un cammino in X con pto iniziale x_0



Se prendo $t \in I \xmapsto{\alpha} [\gamma_t]$ cammino γ tra 0 e t riparametrizzato

$$[\gamma_t] \in \tilde{X}$$

è un cammino in $\tilde{X}$ ES: verificate che è continuo.

$$\left.\begin{aligned} \alpha(0) &= [\gamma_0] = [\varepsilon_{x_0}] \\ \alpha(1) &= [\gamma_1] = [\gamma] \end{aligned}\right\} \text{ è un cammino tra } [\varepsilon_{x_0}] \text{ e } [\gamma]$$

ok!

- ora $p_* \pi_1(\tilde{X}, [\varepsilon_{x_0}]) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$

già visto 1000 volte $\longmapsto$ $\|$

$$\left\{ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \text{ tc } \alpha \text{ si solleva a un laccio con pto di partenza } [\varepsilon_{x_0}] \right\}$$

ma se prendo $t \xmapsto{\beta} [\alpha_t]$, $t \in I$

stessa def. di prima

$\beta(0) = [\varepsilon_{x_0}]$ $\quad \beta(1) = [\alpha]$ e β è un sollevamento di α

Ma allora $\beta(1) = [\alpha]$

$\beta(1) = [\varepsilon_{x_0}]$ $\boxed{!}$ ci siamo!

☒

Esempi di rivestimenti universali

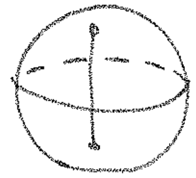
1) Alcuni già visti ...

$\mathbb{R} \xrightarrow{e} S^1$ $\quad$ $\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ Toro $\quad$ $S^2 \longrightarrow S^2$ $\quad$ $S^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$

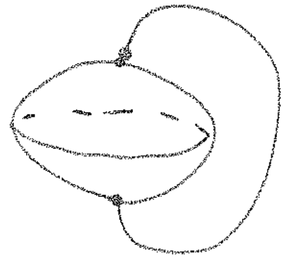
In generale vale che:

- $\mathbb{R}^2$ è il rivestimento universale delle superfici orientabili
- S^2 è il rivestimento universale di quelle NON orientabili

2) Della figura a otto già visto!

3)  ce l'ha un rivestimento universale?
Deve averlo perché è facile vedere che è slsc (è anzi localmente contraibile)

ma a vederlo così non pare chiarissimo cosa fare ...

omeo a 

questa è solo questione di rappresentazione tridimensiona

ES (Manetti 13.27) $\tilde{X}, X$

$p : \tilde{X} \to X$ cpa e loc cpa

$A \subseteq X$ aperto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(A)$ $p(\tilde{x}_0) = x_0$

$p^{-1}(A)$ è connesso ~~sse~~

$$\underbrace{\left(p|_{p^{-1}(A)}\right)_* \left(\pi_1(A, \tilde{x}_0)\right)}_{\text{interseca ogni laterale destro di } p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)} \subseteq \pi_1(X, x_0)$$

---

esercizi dal foglio 2

Fatto

Sia
$$\begin{tikzcd} \phi : \pi_1(Y/G, x_0) \arrow[r, "\sim"] & G \\ \psi : \pi_1(Y/H, z_0) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "p_*"] & H \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

vale che questo diagramma è commutativo

Rivediamo com'è fatto

ϕ: fissiamo $y_0 \in Y$ tale che $\pi_G(y_0) = x_0$

$$\pi_1(Y/G, x_0) \longrightarrow G$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \\ [\alpha] & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{unico } g \in G \\ \text{tale che} \\ \varphi = \tilde{\pi}_{/G} \text{ sollev. di } \pi_G \overset{\text{rispetto}}{\text{a } \pi_G} \\ \text{con } \varphi(y_0) = \tilde{\alpha}_{y_0}(1) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & Y/H \arrow[dl] \\ Y/G & \end{tikzcd}$$

Sia ora $h \in H < G$

allora $\phi^{-1}(h)$ è $[\alpha]$ tale che

Osservazioni (Nel Kosniowski è tutto "left to the reader")

Y semplicemente connesso

G gruppo che agisce pd su Y

considero

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi_G"] \\ Y/G \end{tikzcd}$$

che è mappa di rivestimento tale che $\pi_1(Y/G, x_0) \cong G$

Sia ora $H < G$

abbiamo che H agisce pd su Y e

che esiste il diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi_H"] \arrow[d, "\pi_G"'] & Y/H \arrow[dl, "p"] \\ Y/G & \end{tikzcd}$$

dove p è un rivestimento per lemma precedente

$$\tilde{\alpha}_{y_0}(1) = h \cdot y_0 \in H \cdot y_0$$

ma allora guardiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\alpha} \curvearrowright y_0 & Y \arrow[d] \arrow[r, "\pi_H"] & Y/H \arrow[dl, "p"] \\
\alpha \circlearrowleft x_0 & Y/G &
\end{tikzcd}$$

allora $\pi_H \circ \tilde{\alpha}_{y_0}$ è un laccio in Y/H

con punto base, un certo $\pi_H(y_0) = z_0 \in p^{-1}(x_0)$

allora $\left[\pi_H \circ \tilde{\alpha}_{y_0}\right] \in \pi_1(Y/H, z_0)$

allora però osservo che $\pi_H \circ \tilde{\alpha}_{y_0}$ è sollevamento di α tramite p con punto di partenza z_0 dunque

$$[\alpha] \in \underbrace{p_* \pi_1(Y/H, z_0)}$$

quindi abbiamo visto che $\phi^{-1}(H) \subseteq p_*\pi_1(Y/H,$

ma è chiaro che vale anche il viceversa !

lo stesso teorema dal pdv della monodromia

(cf Manetti 13.7)

<u>Teo</u> (Manetti 13.35) $\boxed{\text{rivestimenti con monodromia assegnata}}$

X connesso loc cpa e sl sc -

per ogni insieme T non vuoto e

per ogni azione destra

$$T \times \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\ \bullet\ } T$$

esiste un rivestimento

$$p: \tilde{X} \longrightarrow X$$

ed una bigezione $p^{-1}(x_0) \xleftarrow{\ \phi\ } T$

tale che $\phi(t \cdot a) = \phi(t) \cdot a \quad \forall t \in T$

e per ogni $a \in \pi_1(X, x_0)$

Inoltre la coppia (p, ϕ) è unica a meno di isomorfismo.

Dimostriamo che questo teorema implica la classificazione dei rivestimenti:

<u>dim</u>: sia $H < \pi_1(X, x_0)$ cosa dovremmo prendere per costruire $\hat{X}_H$? che fibra dovrebbe avere? dobbiamo avere la lifting correspondence

$$\pi_1(X, x_0) \big/ H \xrightarrow[\sim]{\phi} p^{-1}(x_0)$$

↑ laterali destri di H in $\pi_1(X, x_0)$

quindi prendiamo proprio questo insieme con la ovvia azione destra

$$T \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow T$$

$$(H[\alpha], [\beta]) \longmapsto Ha \cdot b := H[\alpha\beta]$$

allora $\exists\ \hat{X}_H \xrightarrow{p_H} X$ tale che

$$p_H^{-1}(x_0) = T$$

per cui $\bullet$ è proprio l'azione di monodromia (per il teorema)

prendendo $\tilde{x}_0 \in T$ $\tilde{x}_0 = H$ laterale banale

$p_* \pi_1(\hat{X}_H, \tilde{x}_0) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid H[\alpha] = H\} = H$ $\boxed{\text{OK}}$

Esercizi

(Kosniowski 22.3 (c) pag 174 ed inglese)

1) Dimostriamo usando i rivestimenti (e non van Kampen) che le sfere n-dimensionali per $n \geq 2$ sono semplicemente connesse.

Sappiamo che sono varietà n-dimensionali e dunque che ammettono il rivestimento universale:

$$\begin{array}{c} \tilde{S}^n \\ \downarrow u \\ S^n \end{array}$$

sia questo

Considero $D^n \xrightarrow{f} S^n$

mandando $\partial D^n \longrightarrow x_0 \in S^n$
(esercizio per loro)

$f_* \pi_1(D^n, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ dunque f si solleva al rivestimento universale

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \tilde{S}^n \\
D^n/\partial D^n \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\
S^n \arrow[uur, bend right, "\tilde{\tilde{f}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$f(\partial D^n) = x_0$

dunque

$\tilde{f}(\partial D^n) \subseteq \underbrace{u^{-1}(x_0)}_{\text{che è insieme discreto}}$

ma allora $\tilde{f}(\partial D^n) = \tilde{x}_0 \in u^{-1}(x_0)$

e allora $\exists\ \tilde{\tilde{f}} : S^n \longrightarrow \tilde{S}^n$

che fa commutare il diagramma

ma allora abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(D^n, y_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend left, "\tilde{f}_*"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \pi_1(S^n, x_0) \arrow[r, "\tilde{\tilde{f}}_*"] & \pi_1(\tilde{S}^n, \tilde{x}_0) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\{[\varepsilon_{y_0}]\} & & \{[\varepsilon_{x_0}]\}
\end{tikzcd}$$

e va bbè questo non mi dice molto ma ho

che $u \circ \tilde{\tilde{f}} = id_{S^n}$ e <u>questo</u> mi dice che

$\pi_1(S^n, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$? OK

"Dimostrazione" che il rivestimento universale della superficie orientabile di genere $g \geq 1$ Σ_g è omeomorfo ad $\mathbb{R}^2$, usando solo la topologia.

<u>FATTO</u> (che comunque è importante e va detto) esiste una mappa di rivestimento di grado n tra Σ_g e $\Sigma_{g'}$ <u>se e solo se</u> $g = n(g'-1)+1$

(per fare questo si usa la triangolazione di superfici e la loro caratteristica di Eulero)

Da questo fatto è chiaro che se costruiamo una mappa di rivestimento $\tilde{X} \xrightarrow[u]{} \Sigma_2$ con $\tilde{X}$ omeo a $\mathbb{R}^2$, allora $\forall g \geq 2$ $\exists r : \Sigma_g \to \Sigma_2$ rivestimento, ma allora esiste p per la proprietà universale del rivestimento universale,

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \Sigma_2 & & \Sigma_g \arrow[ll, "r"] \end{tikzcd}$$

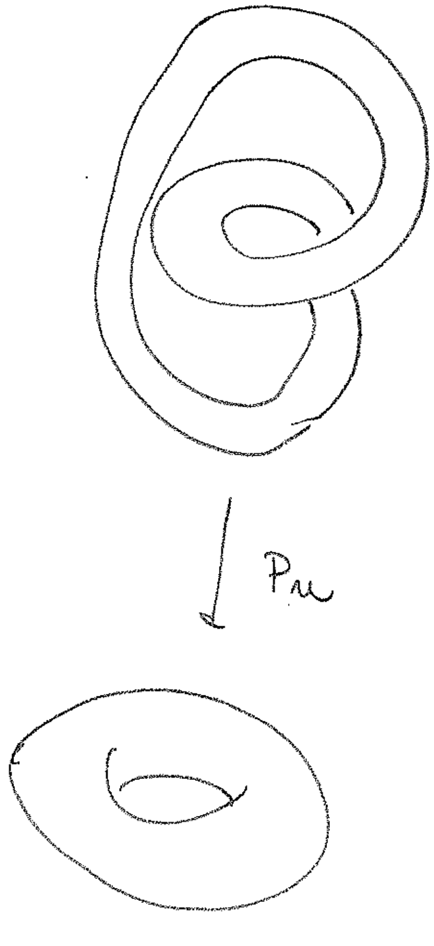
e dunque $\tilde{X}$ è <u>il</u> rivestimento anche di Σ_g.

Per $g=1$ già lo sappiamo che $\mathbb{R}^2$ riveste il Toro $T = \Sigma_1$

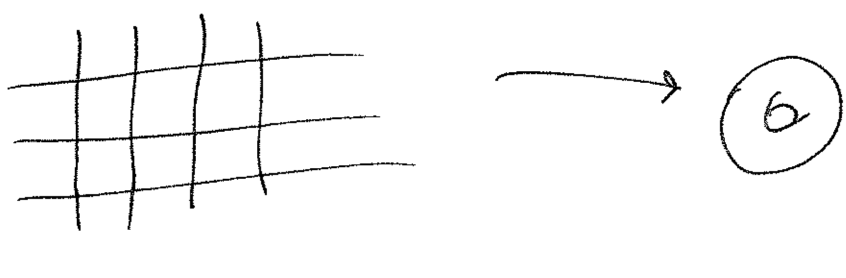
<u>OSS</u> il fatto sul toro mi dice che $\forall n \geq 1$ esiste un rivestimento di grado n $T \xrightarrow{p_n} T$, ma osserviamo che lo sapevo già: mi basta prendere $S^1 \times S^1 \xrightarrow{id \times p_n} S^1 \times S^1$

$$(s,t) \longmapsto (s, t^n)$$

che chiaramente va benissimo.



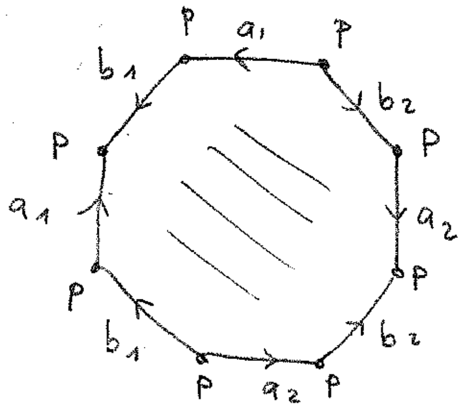
Vediamo un po' il rivestimento del toro



da un punto di vista "costruttivo"

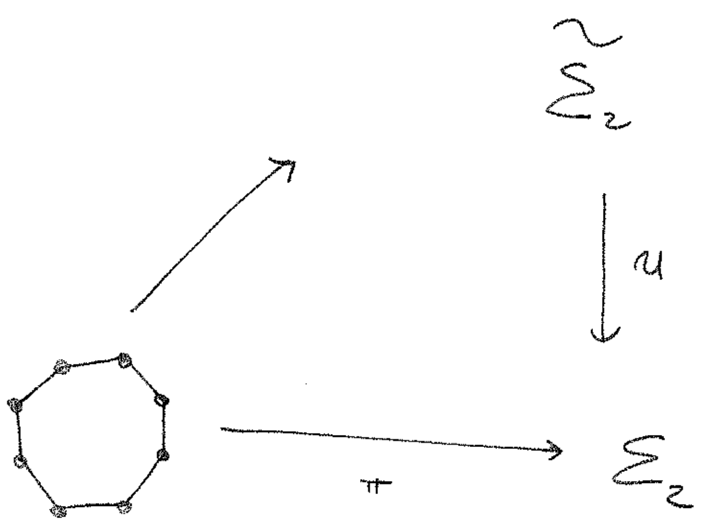
Dimostriamo dunque che esiste questo rivestimento universale (seguiamo "Classical topology and combinatorial group theory" di John Stillwell)
(googolato su Internet!)

Σ_2



<u>OSS</u> se ho un rivestimento universale di devo avere fibra isomorfa a
$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \rangle$$
(quindi infinita in particolare)

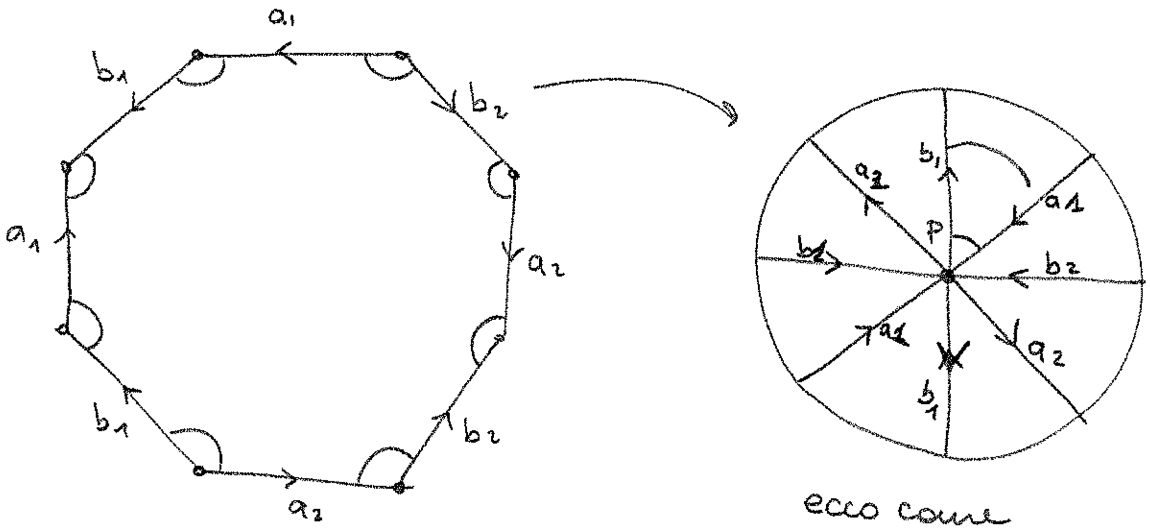
se ho un rivestimento universale di Σ_2 fissato il punto $p \in \Sigma_2$ immagine dei vertici dell'ottagono, osserviamo che



La mappa quoziente si solleva

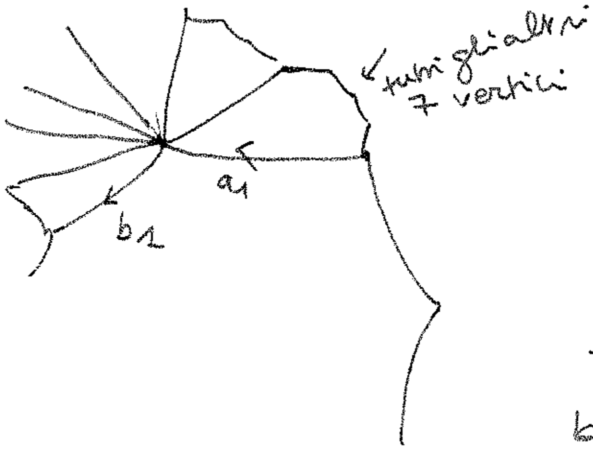
ok ma non so se mi serve

ora attenzione gli otto punti devono andare in punti diversi perchè i lati corrispondenti sono non banali in Σ_2



ecco come costruisco l'intorno di P in Σ_2

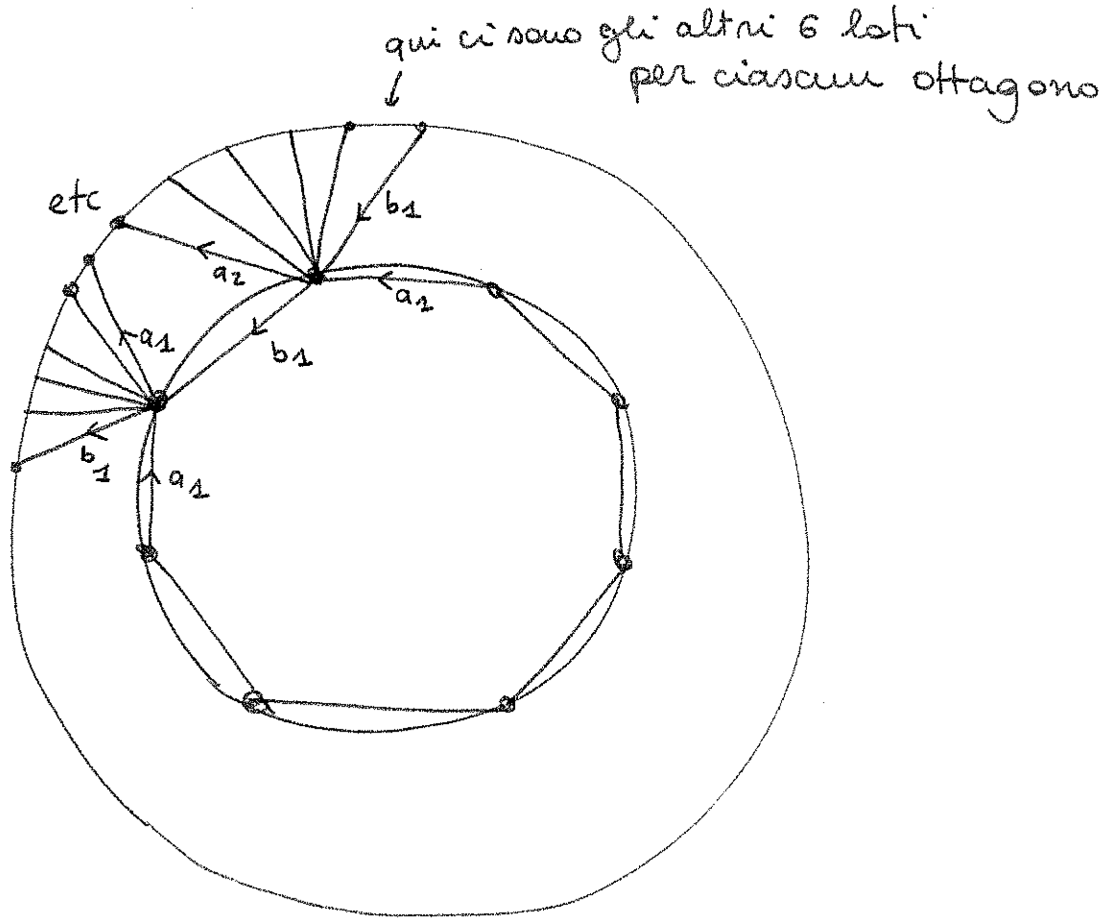
allora l'idea è di ricoprire un disco aperto con (infiniti) pezzi omeomorfi all'ottagono incollati opportunamente secondo quella regola



e di continuare così

osservate che tutto questo è ben definito perché c'è solo un modo di farlo.

facciamo così:



uno fa un po' di disegni e vede a mano
che tutto torna!

poi itero questo procedimento ...

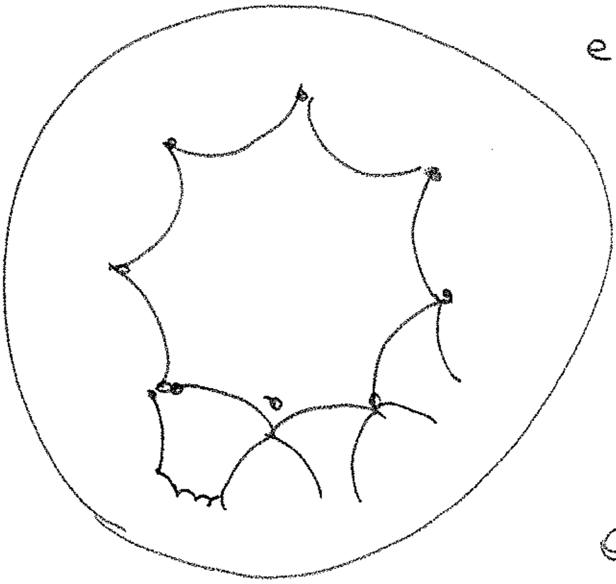
prendendo cerchi di raggio $n \to +\infty$

ricopro tutto il piano $\mathbb{R}^2$ con questi ottagoni

e poi definisco la funzione incollando
tutti i bordi di ciascun ottagono secondo
le regole appena descritte.

$\boxed{\text{OSS}}$ se fisso R come punto base e fisso un punto sopra ho una
corrispondenza biunivoca tra parole nel
$\pi_1(\Sigma_2, p)$ e $p^{-1}(R)$ $\boxed{?}$

un modo molto carino è costruire la tassellazione di D^2 (aperto) con ottagoni piani iperbolici



e applicare la regola appena descritta meglio che cerchino dei disegnini su internet.

EXCURSUS

Dal pdv delle superfici di Riemann

dal pdv dell'analisi complessa

abbiamo il Teorema di uniformizzazione che ci dice che ogni superficie di Riemann è conformally equivalent (biolomorfa) a una delle tre seguenti: $\mathbb{C}$, $\mathring{D}^1 \subseteq \mathbb{C}$ e S^2

Mettendo insieme questo + altri risultati, risulta che sappiamo qual è il rivestimento universale? CF a isoletto di [illegible]