Introduzione al corso di istituzioni di Geometria Superiore

Introduzione alla topologia algebrica

~~Scopo~~ principe della topologia: classificare gli spazi topologici "a meno di" "isomorfismi opportuni"

omeomorfismo $\rightsquigarrow$ proprietà topologiche (connessione, compattezza, etc)

equivalenza omotopica $\rightsquigarrow$ proprietà invarianti per omotopia (contraibilità, semplice connessione ...

Topologia algebrica

Associamo invarianti algebrici agli spazi topologici

spazi topologici $\mapsto$ { gruppi, anelli, spazi vettoriali, Moduli }

In un modo Naturale
punto di vista giusto: quello di teoria delle categorie

Già visto esempio principale: gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$

Argomenti che tratteremo:

* van Kampen davvero
* teoria dei rivestimenti

} → "tutto quello che volevate sapere sul gruppo fondamentale ma non avete mai osato chiedere"

* omologia simpliciale

Altro grandissimo invariante algebrico — gruppi abeliani ($\mathbb{Z}$-moduli) associati a spazi topologici

come potenza di calcolo è come passare da un fucile a pallettoni (ie gruppo fondamentale) a una mitragliatrice.

Riferimenti bibliografici:

(ora è il momento di riuscire a districarsi su più testi)

- Hatcher, Algebraic topology
- Munkres, Topology
- Manetti Topologia

per la prima parte

- Kosniowski Intro alla Topologia Algebrica
- Munkres, Elements of Algebraic Topology + Hatcher

per l'omologia

Esame:

Scritto + orale →
- orale normale per il terzo anno (argomento per prima domanda)
- seminario di approfondimento per la specialistica

↓ sul sito link di vecchi scritti

Faremo insieme gli esercizi dei vecchi compiti

Richiami sul gruppo fondamentale

(Ref: Manetti, Kosniowski)

(andare a ristudiare Geometria 1 se è necessario!)

det. omotopia tra funzioni $f, g : X \to Y$ funzioni continue

$\boxed{f \simeq g}$ (f è omotopa a g) se

$\exists\, H : X \times I \to Y$ continua tale che

$H(x,0) = f(x) \quad \forall x \in X$
$H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$

· omotopia relativa a $A \subseteq X$ se $\forall a \in A \ \forall t \in I$

$\boxed{f \simeq_A g}$ $\quad H(a,t) = f(a) = g(a)$

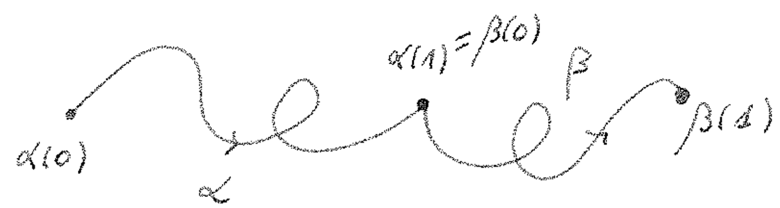
equivalenza di cammini : omotopia tra cammini $\alpha, \beta : I \to X$ relativa a $\{0,1\}$

$$\boxed{\underset{\text{notaz.}}{\alpha \sim \beta} := \alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta}$$

det: Se α, β sono cammini in X tali che $\alpha(1) = \beta(0)$ (tali α e β si dicono "compatibili") definiamo la loro concatenazione (o giunzione)

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

è un cammino in X (per lemma di incollamento)



cammino opposto : se $\alpha : I \to X$ è un cammino, definiamo

$\bar{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$ cammino tra $\alpha(1)$ e $\alpha(0)$

"che percorre α in senso opposto".

voglio definire sui cammini in X un'operazione data dalla giunzione, in modo da ottenere una struttura algebrica

Richiesta naturale: che $\bar{\alpha}$ sia l'inverso di α ⟶ problema!

Anche l'elemento neutro è un problema

Ma questi problemi si risolvono passando alle classi di equivalenza!

<u>Proprietà</u>: (ripassate le dimostrazioni)

1) se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$ e sono compatibili allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ (→ la giunzione di cammini passa alle classi di equivalenza)

2) Se α, β e γ sono compatibili a coppie ordinate, allora $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$

(⇝ vale la proprietà associativa)

3) Se ε_x è il cammino costante in $x \in X$, vale che

$$\varepsilon_{\alpha(0)} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_{\alpha(1)} \quad \forall \text{ cammino } \alpha \text{ in } X$$

(⇝ ogni classe di equivalenza ha inverso dx e sin)

4) $\forall \alpha$ cammino in X

$$\alpha * \bar{\alpha} \sim \varepsilon_{\alpha(0)} \qquad \bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{\alpha(1)}$$

(⇝ esistenza inverso)

In questo modo otteniamo una <u>struttura algebrica</u> su

$$\left\{ \text{classi di equivalenza di cammini in } X \right\} = \left\{ \text{cammini in } X \right\} / \sim$$

per avere un'operazione binaria dobbiamo fare questo:

fissiamo un <u>punto base</u> $x_0 \in X$

<u>def</u>: laccio con punto base x_0 in X: cammino $\alpha : I \to X$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

se ora considero

$$\left\{ \text{lacci con punto base } x_0 \right\} / \sim \; =: \pi_1(X, x_0)$$

$\boxed{\text{Gruppo FONDAMENTALE di } X \text{ con punto base } x_0}$

è un gruppo con operazione

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta]$$

elemento neutro: $[\varepsilon_{x_0}]$

$\forall [\alpha]$ inverso di α $[\alpha]^{-1} := [\overline{\alpha}]$

[Tutto questo deriva dalle proprietà elencate prima]

<u>Importantissime proprietà</u>

$\boxed{\begin{array}{l}\bullet \text{ prima:} \\ \text{se } \gamma \text{ è cammino in } X \text{ tra } x_0 = \gamma(0) \text{ e } x_1 = \gamma(1) \\ \text{allora } \mu_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \text{ è isomorfismo}\end{array}}$

a) Se ho $f : X \to Y$ continua allora posso definire

dato $x_0 \in X$

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

f_* è un omomorfismo di gruppi chiamato <u>omomorfismo indotto</u> da f.

b) Se considero $id_X : X \to X$, allora ho $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$ $\forall x_0 \in X$

Dunque:

L'omomorfismo indotto dall'identità è l'omomorfismo identico

c) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ continue

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Queste proprietà spesso si indicano con il termine "funtorialità": vediamo tra poco il significato preciso (teoria delle categorie)

<u>OSS</u>: Da (c) e (b) deduco immediatamente che se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo allora f_* è un isomorfismo di gruppi ($\Rightarrow$ la classe di isomorfismo del gruppo fondamentale di uno spazio cpa è un invariante topologico)

I ma possiamo dire di più:

<u>Prop</u>:
Se $f \simeq g$ $\quad f, g : X \to Y$ applicazioni continue

allora dato $x_0 \in X$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[dl, "\mu_\gamma"] \\ & \pi_1(Y, g(x_0)) & \end{tikzcd}$$

$\exists\ \gamma$ cammino in Y tra $f(x_0)$ e $g(x_0)$, e vale che $\mu_\gamma \circ f_* = g_*$ (cioè il diagramma lì sopra è commutativo)

<u>Cor</u>: Se $X \simeq Y$ (X è omotopicamente equivalente a Y) allora Dato $x_0 \in X$ date $\varphi : X \to Y$ $\psi : Y \to X$ tali che $\varphi \circ \psi \simeq id_Y$ e $\psi \circ \varphi \simeq id_X$, ho che

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

<u>Esercizio</u>:
- Se $X \simeq Y$ e X è cpa $\Rightarrow$ Y è cpa
- Se $X \simeq Y$ allora ho biiezione tra le componenti connesse p.a. di X e quelle di Y.

Categorie e Funtori

Una categoria piccola $\mathcal{C}$ è il dato di

(1) un insieme $Ob(\mathcal{C})$ i cui elementi si dicono oggetti di $\mathcal{C}$

altrimenti in generale devo prendere una classe

(2) $\forall a,b \in Ob(\mathcal{C})$ un $Mor_{\mathcal{C}}(a,b)$ i cui elementi si chiamano morfismi tra a e b in $\mathcal{C}$. (o meglio Frecce)

(3) $\forall a,b,c \in Ob(\mathcal{C})$ un'applicazione (detta composizione in $\mathcal{C}$)

$$\circ_{\mathcal{C}} : Mor_{\mathcal{C}}(a,b) \times Mor_{\mathcal{C}}(b,c) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(a,c)$$

che soddisfano i seguenti assiomi:

(a) la composizione $\circ_{\mathcal{C}}$ è associativa:

$\forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(a,b)$ $\forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(b,c)$ $\forall h \in Mor_{\mathcal{C}}(c,d)$

vale che $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(b) $\forall a \in Ob(\mathcal{C})$ $\exists$ $id_a \in Mor_{\mathcal{C}}(a,a)$ che soddisfa che, per ogni $b \in Ob(\mathcal{C})$

$$f \circ id_a = f \quad \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(a,b)$$
$$id \circ g = g \quad \forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(b,a)$$

ESEMPI:

1) Categoria degli insiemi + applicazioni tra insiemi

Set

2) Top spazi topologici + applicazioni continue
(+ categoria degli spazi topologici puntati)

3) Gruppi + omomorfismi Grp

4) Spazi vettoriali su un campo k + applicazioni lineari Vec_k

5) Aperti in un dato spazio topologico con $\subseteq$ come morfismi

6) S insieme qualsiasi posso definire categoria con $Ob(\mathcal{C}) = \{S\}$ e $Mor_{\mathcal{C}}(S,S) = id_S$ e basta

Fino adesso i morfismi sono in effetti applicazioni.
ora qualcosa di un po' diverso

"Homotopy category"
7) Oggetti: spazi topologici
morfismi: classi di omotopia di applicazioni continue

8) $(X, \leq)$ insieme parzialmente ordinato

$Ob(\mathcal{C}) = \{x \in X\}$

$$\forall x,y \in X \; Mor_{\mathcal{C}}(x,y) = \begin{cases} \text{un solo elemento se } x \leq y \\ \emptyset \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$x \leq x \rightsquigarrow \mathbb{1}_x$

transitività $\rightsquigarrow$ composizione

9) G gruppo
posso definire categoria $\mathcal{G}$ con

$Ob(\mathcal{G}) = \{G\}$

$Mor_{\mathcal{G}}(G,G) = G$ e composizione: comp. di gruppo

Viceversa (e qualcuno come Lafforgue sosterrebbe che è il modo migliore di definire un gruppo)

Se prendo una categoria $\mathcal{M}$ con 1 solo oggetto x

$Mor(x,x)$ ha una legge di composizione associativa ed esiste $1\!\!1_x \in Mor(x.x)$ tale che

$\forall a \in Mor(x.x) \qquad a \circ 1\!\!1_x = a = 1\!\!1_x \circ a$

Questo oggetto si chiama <u>Monoide</u>

$f \in Mor_{\mathcal{C}}(x.y)$ $\exists\, g$ tale che $\in Mor_{\mathcal{C}}(y,x)$

$f \circ g = 1\!\!1_y$ e $g \circ f = 1\!\!1_x$

si dice isomorfismo.

[<u>def</u>: un gruppoide è una categoria piccola i cui morfismi sono isomorfismi vedi pag. 6]

<u>oss</u>,
un <u>gruppo</u> è una categoria con 1 oggetto solo (un monoide) tale che tutti i morfismi sono isomorfismi.

costruzione importante: <u>Categoria opposta</u>

Data $\mathcal{C}$ categoria

La categoria opposta di $\mathcal{C}$ $\quad \mathcal{C}^{op}$

è la categoria così definita: $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$

e tale che $\forall x.y \in Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$

$$Mor_{\mathcal{C}^{op}}(x.y) := Mor_{\mathcal{C}}(y.x)$$

<u>osservo</u>: $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

<u>Es</u>: verificare (immediato) che è una categoria.

Per quelli che hanno fatto geometria algebrica (vediamo la naturalità e la importanza di queste costruzioni)

<u>Aff</u> è <u>Alg$_k$</u>^{op} k-algebre

schemi affini su k

e stesso <u>Varaff</u> $\quad \{ k\text{-algebre finitamente generate e ridotte} \}^{op}$

Funtore tra categorie

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie. Un <u>Funtore</u> (covariante) $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è il dato di:

- una <u>funzione</u> $F: Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ X & \longmapsto & F(X) \end{array}$$

- una funzione sui morfismi: $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ lo

$$F: Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
$$f \longmapsto F(f)$$

Tali che

F rispetta la struttura
$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \forall x \in Ob(\mathcal{C}) \quad F(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{F(X)} \\ \bullet \ \forall f, g \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad F(fg) = F(f)F(g) \end{array} \right.$

<u>def</u> Funtore controvariante "che inverte le frecce"

$$F: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$$

<u>Esempio</u>

1) Vec_K considero $Hom_K(-, K): Vec_K^{op} \longrightarrow Vec_K$

2) Considero, dato X spazio topologico

$\pi_0(X) := X/\sim$ dove $x \sim y$ sse $\exists \alpha: I \to X$ cammino tc $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$

$\Updownarrow$

componenti connesse per archi di X

verificate che se $f: X \to Y$ è appl. continua allora $\forall C \subseteq X$ componente cpa $f(C) \subseteq$ comp cpa di Y (chiaro) e dunque abbiamo una applicazione indotta $\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$

$$[x] \mapsto [f(x)]$$

verificate che si tratta di un funtore (covariante) $\pi_0: \underline{Top} \longrightarrow \underline{Set}$

3) Le proprietà che abbiamo appena richiamato sopra ci dicono che π_1 è un funtore covariante

$$\underline{Top_*} \xrightarrow{\pi_1} \underline{Grp}$$

spazi topologici puntati — gruppi

$$f \longmapsto f^*$$

Non solo siccome

4) Se voglio un funtore da $\underline{Top}$

"gruppo fondamentale"

come posso fare? Dato X spazio topologico

$\forall\, x_0 \in X \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0)$ ben definito.

Non solo, tutte le proprietà richiamate prima ci dicono che $\forall$ coppia di punti $x_0, x_1 \in X$ posso considerare

$$\frac{\Omega(x_0, x_1)}{\sim}$$

cammini da x_0 a x_1 in X

modulo equivalenze di cammini.

questo non è un gruppo però una struttura ce l'ha

e di certo so che.

Definisco un Gruppoide: categoria che ha tutti i morfismi che sono isomorfismi.

Gruppoide con 1 solo oggetto: gruppo

Ora considero

$\pi_1 : \underline{Top} \longrightarrow \underline{Gruppoidi} = \underline{\mathcal{G}}$

$\pi_1(X) =$ Gruppoide che ha come oggetti i punti di X

$\forall X$,
e $\forall x_1, x_2 \in X$ i morfismi di $\pi_1(X)$ tra x_1 e x_2 sono le classi di equivalenza di cammini tra x_1 e x_2

chiaro che è un gruppoide

$\left.\begin{array}{l}\forall X, Y \in \underline{Top} \\ \forall f : X \to Y \text{ funzione continua}\end{array}\right\}$ ho $f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$

fatto così:

sugli oggetti

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) \\ \cap\!\!\!\shortmid & & \cap\!\!\!\shortmid \\ X & & Y \end{array}$$

sui morfismi

$[\gamma]$ cammino tra x_0 e x_1 $\longrightarrow$ $[f \circ \gamma]$ cammino tra $f(x_0)$ e $f(x_1)$

$\pi_1(X)$ si chiama <u>gruppoide fondamentale di X</u>

<u>ES</u> X è semplicemente connesso (cioè $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$ per $\forall x_0$ è cpa+)

se $\forall x, y \in X$
$\pi_1(X)(x, y)$ è ~~1 solo~~ al più un elemento

PRODOTTI su una categoria $\mathcal{C}$
(DI due oggetti)

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

diagramma a 3 oggetti in una categorie $A, B, P \in Ob(\mathcal{C})$

si dice un prodotto se $\forall$ diagramma $\begin{tikzcd}[cramped] & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$

$\exists !$ morfismo $X \to P$

che rende commutativo il diagramma

in Set prodotto cartesiano

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

NB! questa si chiama proprietà universale del prodotto

ES Dati due spazi topologici A e B il loro prodotto (lo spazio topologico prodotto) è un prodotto nella categoria Top

in Grp prodotto di gruppi!

Coprodotto: prodotto nella categoria opposta | Esempi:

somma diretta di 2 gruppi abeliani

coprodotto di insiemi unione disgiunta

ES: un prodotto se esiste è unico (a meno di isomorfismo)

Allo stesso modo posso definire il prodotto di una famiglia arbitraria

Allo stesso modo posso definire prodotto e coprodotto di famiglie di oggetti in una categoria

DIGRESSIONE di Manetti pag 193

$\{*\}$ singoletto. Sia Y spazio topologico qualsiasi

$$\mathcal{C}(\{*\}, Y) = \{ \text{funzioni (continue) da } \{*\} \text{ in } Y \}$$

ovviamente $\mathcal{C}(\{*\}, Y)$ è in biiezione con Y

→ Se lo dotiamo della topologia compatta-aperta è anche omeomorfo a Y:

def Dati spazi topologici

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{ \text{funzioni continue da } X \text{ in } Y \}$$

la topologia compatta-aperta è la topologia che ha come prebase i sottoinsiemi

$$W(K, \mathcal{U}) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subseteq \mathcal{U} \}$$

al variare di K compatto in X e $\mathcal{U}$ aperto in Y

se X è localmente compatto e T2 vale che queste topologie ha delle buone proprietà.

Nel caso di $X = \{*\}$ singoletto

$$W(\{*\}, \mathcal{U}) = \{ f \in \mathcal{C}(\{*\}, Y) \mid f(*) \subseteq \mathcal{U} \}$$

$$W(\{*\}, \mathcal{U}) = \{ f \in \mathcal{C}(\{*\}, Y) \mid f(*) \in \mathcal{U} \}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\mathcal{U} = \{ y \in Y , y \in \mathcal{U} \}$$

quindi è chiaro che qui viene proprio la topologia di Y

Possiamo dunque considerare

$$\pi_0(Y) \overset{\text{da quanto detto}}{=} \pi_0(\mathcal{C}(\{*\}, Y))$$

prendiamo spazi <u>puntati</u>

$$\mathcal{C}((X_0, x_0), (Y, y_0)) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ tc } f(x_0) = y_0 \}$$

vale che

$$\pi_0\left(\mathcal{C}(S^n, N), (Y, y_0)\right) =: \pi_n(Y, y_0)$$

n-esimo gruppo di omotopia di Y

<u>oss importante</u> che fa capire che è utile:

$$\pi_0(\mathcal{C}(S^2, S^1 \times S^1)) = 1 \text{ punto}$$

$$\pi_0(\mathcal{C}(S^2, S^2)) = \text{insieme infinito (numerabile)}$$

questo ci dice che $\underline{S^2 \not\simeq S^1 \times S^1}$

TUTTO quello che volevate sapere sul gruppo fondamentale ma non avete mai osato chiedere

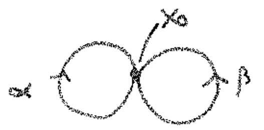
van Kampen. [INTRO]

ESERCIZIO illuminante

$X = C_1 \cup C_2$ figura ad otto in $\mathbb{R}^2$

$\pi_1(C_1, x_0) = \mathbb{Z}[\alpha]$

$\pi_1(C_2, x_0) = \mathbb{Z}[\beta]$



Cosa possiamo dire? $X \xrightarrow{r_1} C_1$ è una retrazione (ovviamente)

$$r_1(x) = \begin{cases} id_{C_1}(x) & \text{se } x \in C_1 \\ x_0 & \text{se } x \in C_2 \end{cases}$$

$X \xrightarrow{r_2} C_2$ definita analogamente è una retrazione

dunque $i_{1*}: \pi_1(C_1, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ è una inclusione

$i_{2*}: \pi_1(C_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ pure / li chiamo ancora α e β

(ES: se $r: X \to Y$ è retrazione su $Y \underset{i}{\subseteq} X$ allora i_* è iniettiva)

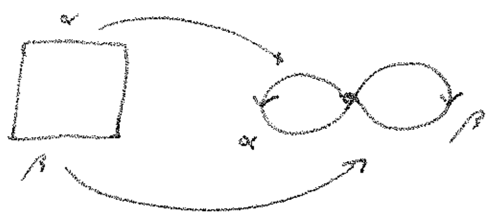
allora che posso dire?

Van Kampen baby: $\pi_1(X, x_0)$ <u>è generato</u> da α e β

come sarà fatto?

<u>claim</u> $\alpha \not\sim \beta$ in X infatti se avessi

$F: I \times I \longrightarrow X$ omotopia tra α e β relativa a $\{0,1\}$



(ES: provate a dimostrarlo)

allora posso considerare

$r_1 \circ F: I \times I \longrightarrow C_1$

questa è omotopia in C_1 rel a $\{0,1\}$ tra α e ε_0

Assurdo.

(analogamente $r_2 \circ F: I \times I \to C_2$ darebbe $\beta \sim \varepsilon_{x_0}$ in C_2)

Allo stesso modo posso vedere che $\forall (n,k) \neq (0,0)$ in $\mathbb{Z}^2$

$\alpha^n \not\sim \beta^k$.

Notate però che questo ragionamento non ci permette (direttamente) di concludere ad esempio che $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} \not\sim \varepsilon_{x_0}$ in X

__claim__ $\beta\alpha \not\sim \alpha\beta$

e $\forall n, k, l, t$ $\beta^n\alpha^k \not\sim \alpha^l\beta^t$
purché non siano tutte nulle o quelle per cui viene direttamente una uguaglianza

(provate a dimostrarlo)

Questo gruppo che viene fuori è il <u>gruppo libero su 2 elementi</u>

Introduciamo questo gruppo e in generale un nuovo modo per costruire gruppi che ci permetterà:

- <u>di costruire nuovi gruppi</u> (come questo qui sopra)
- <u>di costruire TUTTI i gruppi</u> (ma ahimè non è un metodo molto conveniente nella pratica)
- <u>di enunciare van Kampen in generale</u>.
(e dimostrare)

seguiamo Munkres

Ricordiamo che gruppo abeliano = $\mathbb{Z}$-modulo
(notazione additiva)
Dunque richiamiamo la somma diretta di gruppi abeliani

(L'unica differenza rispetto ai moduli con Monti è che facciamo Σ di famiglie arbitrarie, non finite)

def G, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ gruppi abeliani $\boxed{G_\alpha \leq G}$

I G_α generano G se $\forall g\in G$ $\exists$ $g_{\alpha_i}\in G_{\alpha_i}$ tc $g = g_{\alpha_1}+\dots+g_{\alpha_k}$, $\alpha_1\dots\alpha_k\in A$ ed

Notaz: $G = \Sigma G_\alpha$ o se $|A|<+\infty$ diciamo $A=\{1,\dots,n\}$ $G = G_{\alpha_1}+\dots+G_{\alpha_k}$

se $\forall g\in G$ la scrittura esiste ed è unica allora
G è la somma diretta (interna) dei G_α

Notaz: $G = \bigoplus_{\alpha\in A} G_\alpha$ (*)

ES, se vale scrittura unica allora $\boxed{\forall\alpha\in A \quad G_\alpha \cap \left(\sum_{\beta\in A\setminus\{\alpha\}} G_\beta\right) = \{0\}}$

infatti se $\exists$ $\bar\alpha$ tale che

$$G_{\bar\alpha} \cap \left(\sum_{\alpha\neq\bar\alpha} G_\alpha\right) \neq \{0\} \quad \text{allora } \exists\ \underset{\neq 0}{g}\in G$$

tale che $g = g_{\bar\alpha}$ per un certo $g_{\bar\alpha}$

e $g = g_{\alpha_1}+\dots+g_{\alpha_k}$ per $\alpha_i\neq\bar\alpha$ $\forall i$

allora la scrittura non è unica.
D'altra parte se vale (*) e ho

$$g = g_{\alpha_1}+\dots+g_{\alpha_k}$$
$$= h_{\beta_1}+\dots+h_{\beta_m}$$

devo avere $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$ (altrimenti avrei un elemento $\neq 0$ $g_{\alpha_1} = \Sigma$ elementi negli altri G_β)

inoltre $\forall\ i = 1, .., k$

$$g_{\alpha_i} = h_{\alpha_i}\ , \quad \text{altrimenti avrei}$$

$$\underset{\substack{\cap \\ G_{\alpha_i} \setminus \{0\}}}{g_{\alpha_i} - h_{\alpha_i}} = \sum \text{elementi negli altri } G_{\alpha_r}$$

$\llcorner$

<u>Lemma</u>: G gruppo abeliano tale che $G = \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ per certi sottogruppi $G_\alpha \leqslant G$

(*) Allora $\forall$ gruppo abeliano H e $\forall$ famiglia di omomorfismi
$$\varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$$
esiste un (unico) omomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$
tale che $\varphi_{|G_\alpha} = \varphi_\alpha$ (inoltre φ è unico)

viceversa

Se $G = \sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ e vale la condizione (*)

allora $G = \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$

<u>dim</u>: Dimostriamo prima la seconda parte

sia $G = \sum G_\alpha$ sia $g \in G$ con $g = \sum a_\alpha = \sum b_\alpha$

vediamo che è unica: $\forall \alpha \in A \quad a_\alpha = b_\alpha$

Fissiamo

$\bar{\alpha} \in A$

considero $G_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} G_{\bar{\alpha}}$ fatta in questo modo:

$h_\alpha = 0$ per $\alpha \neq \bar{\alpha}$ $\quad h_\alpha = id_{G_{\bar{\alpha}}}$ per $\alpha = \bar{\alpha}$

Allora per (*) so che $\exists$

$$h : G \longrightarrow G_\alpha \text{ che estende gli } h_\alpha$$

allora $h(g) = h(\sum a_\alpha) = \sum h(a_\alpha) = a_{\bar{\alpha}}$
$= h(\sum b_\alpha) = \sum h(b_\alpha) = b_{\bar{\alpha}}$ $\quad$ allora ok $\square$

D'altra parte Dimostriamo che se $G = \bigoplus_{\alpha\in A} G_\alpha$ allora vale (*)

sia H gruppo abeliano, siano

$$h_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H \quad \text{omomorfismi}$$

Definiamo $h : G \longrightarrow H$ nel modo ovvio:

Dato $g \in G$ ho che

$$g = \sum g_\alpha \quad \text{in } \underline{\text{modo unico}}$$

allora definisco $h(g) := \sum h_\alpha(g_\alpha)$

ha senso perché la $\sum$ è finita!

è buona definizione perché ho unicità

Anche l'unicità di h è chiara.

<u>COR</u> (da fare loro)

- Sia $G = G_1 \oplus G_2$ se G_1 è $\sum_{\alpha\in A} H_\alpha$ e G_2 è $\sum_{\beta\in B} H_\beta$ allora $G = \sum_{\gamma\in A\cup B} H_\gamma$
- $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$
- se $G = G_1 \oplus G_2 \implies G_1 \cong G/G_2$

I prodotti diretti di gruppi abeliani esistono e sono unici (a meno di unico isomorfismo)

(prodotti diretti esterni)

Teo. Data una famiglia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di gruppi abeliani $\exists$ G gruppo abeliano ed $\exists$ famiglia di monomorfismi $i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$ tali che $G = \bigoplus_{\alpha \in A} i_\alpha(G_\alpha)$] somma diretta esterna

Idea della dim

$\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ prodotto cartesiano

$\cup$ (A-uple $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$)

di elementi di $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ unione

tali che $x_\alpha \in G_\alpha \ \forall \alpha$

ovvero funzioni $A \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, $x \longmapsto x(\alpha)$

tali che

$x(\alpha) \in G_\alpha \ \forall \alpha$

$\prod G_\alpha$ è un gruppo abeliano con la Σ componente per componente.

Prendo $G := \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod G_\alpha$ tali che $x_\alpha = 0_\alpha$ per tutti gli α tranne # finito $\}$ □

---

osservazione importante: come visto a pag 7 i prodotti diretti sono un coprodotto nella categoria dei gruppi abeliani, quindi abbiamo visto che nella categoria AGrps i coprodotti esistono (e sono le somme dirette). Tra poco passiamo alla naturale domanda: quali sono i coprodotti in Grp? (i prodotti liberi)

Gruppi abeliani Liberi ($= \mathbb{Z}$-moduli liberi)

Sia G un gruppo abeliano $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famiglia di elementi di G

$\forall \alpha \quad G_\alpha := \langle g_\alpha \rangle$

se i gruppi G_α generano G, diciamo anche che i $\{g_\alpha\}$ generano G

se ogni G_α è infinito ciclico (i.e. $G_\alpha \cong \mathbb{Z}$)
e se G è $\bigoplus G_\alpha$
dico che G è il <u>gruppo abeliano libero</u>
con $\{g_\alpha\}$ "base"

Il <u>numero</u> di elementi di una base dipende solo da G e si chiama <u>rango</u> di G

<u>| excursus |</u>
Se G è finitamente generato abbiamo il <u>teorema di struttura</u> dei gruppi abeliani finitamente generati:

$$G \cong \mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus \mathbb{Z}/_{p_1^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$$

dove $p_1 \dots p_k$ sono primi $n_1 \dots n_k$ interi
$r = \mathrm{rk}\, G$
e gli ordini dei ciclici primari sono univocamente determinati

Espandiamo l'osservazione a pag 12

La proprietà universale dei gruppi ~~abeliani~~ dirette di abeliani ci dice proprio che è un coprodotto nella categoria <u>AbGrp</u>:

Quindi facciamo attenzione a questo schema:

$$\underline{AbGrp} \subseteq \underline{Grp} \subseteq \underline{Set}$$

qui i coprodotti esistono e sono le <u>somme dirette</u>

qui i coprodotti sono i prodotti <u>cartesiani</u>

non sono uguali ? [ma le somme dirette sono contenute nei prodotti cartesiani]

Ora vediamo che cosa viene nei gruppi ?

vedremo (con sgomento) che in <u>grp</u>

i coprodotti <u>non sono</u> contenuti nei prodotti cartesiani.

Questo pare strano anche a me

<u>Eppure</u> anche nel nostro esempio semplice

$$\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z}}_{} \not\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(ancora non sanno bene cosa vuol dire)

eh chiaramente ?

Forse è arrivato il momento di parlare di prodotti <u>fibrati</u>

Se ho una situazione di questo genere in una categoria $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

cosa significa il prodotto fibrato di A e B rispetto a C??

è un $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ + morfismi $P \to A$ $P \to B$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \arrow[r] \arrow[dr] & D \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

tali che $\forall$ $\begin{matrix} D \\ \downarrow \\ C \end{matrix}$ con $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & D \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$ e $\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & D \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$

$\exists!$ $\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[dr] & P \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$ tale che tutto commuta

<u>Esercizi</u> <u>importante</u> 1) In <u>Set</u> se ho

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$X \times_Z Y$
$=$
$\{(x,y) \in X \times Y$ tali che $f(x) = g(x)\}$

PRODOTTI LIBERI DI GRUPPI

- Se facciamo lo stesso discorso per i gruppi non abeliani? Qua le strade si separano rispetto a quelle dei moduli (e anche degli insiemi dal pdv dei coprodotti ...)

Sia G un gruppo (uso notazione moltiplicativa ora 1, x^n x^{-n} ....)

Sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famiglia di sottogruppi

so cosa significa che i G_α generano G:

$\forall g \in G \quad \exists\ x_1, \dots x_n$ tc $x_i \in G_\alpha$ per qualche α

e $\quad g = x_1 x_2 \dots x_n$

però notate che non possiamo chiedere che gli x_i appartengono a G_α distinti perché non abbiamo più la commutativà!

notaz " $x_1 \cdots x_n$ " "parola nei G_α"

possiamo
- raggruppare $x_i x_{i+1}$ se stanno nello stesso G_α
- eliminare 1 se compare

$\Downarrow$
- eliminare $x x^{-1}$ se compare.

def:

Parola e parola ridotta

parola vuota

def: Sia G un gruppo, $\{G_\alpha\}$ famiglia di sottogruppi di G che lo generano

Supponiamo che (i) $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$ se $\alpha \neq \beta$

(ii) $\forall\, g \in G$ $\exists!$ parola ridotta nei G_α tale che

$g =$ quella parola

Allora G è il prodotto libero dei G_α

NOTAZIONE: $G = \underset{\alpha \in A}{*} G_\alpha$

OSS 1) (i) non basta più per unicità di rappresentazione

ma secondo me (ii) $\Rightarrow$ (i)

2) è sufficiente se ho (i)

(ii)' 1 è rappresentato solo dalla parola ridotta

(Farlo per esercizio)

Esempio:

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \{ \text{parole ridotte in } a \text{ e } b \}$.

è proprio quello che pensavamo per π_1 (figura a otto)

Proprietà universale del prodotto libero di gruppi

Lemma: Sia G un gruppo

sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di sottogruppi $G_\alpha < G$

Se G è il prodotto libero dei G_α allora soddisfa la proprietà universale:

(*) $\forall H$ gruppo e $\forall$ famiglia di omomorfismi $\varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$, esiste un omomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ la cui restrizione a G_α è φ_α $\forall \alpha$

Se tale φ esiste, è unico.

dim.: cf Munkres lemma 68.1 CH 11

Prodotto libero esterno di gruppi

Vogliamo costruire il prodotto libero di una famiglia qualsiasi di gruppi $\{G_\alpha\}$

def Data una famiglia di gruppi $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$
Un gruppo G si dice prodotto libero esterno dei G_α se $\exists\ i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G$ famiglia di omomorfismi iniettivi tale che

$$G = \mathop{*}_{\alpha\in A} i_\alpha(G_\alpha)$$

G è il prodotto libero (interno) dei sottogruppi $i_\alpha(G_\alpha) < G$.

TEO Data una famiglia di gruppi $\{G_\alpha\}$
Esiste un gruppo G e una famiglia di omomorfismi iniettivi $i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G$ tali che G è il prodotto libero degli $i_\alpha(G_\alpha)$

dim: Munkres chap 11
TEO 68.2

La proprietà universale dimostrata prima si traduce immediatamente nella

TEO <u>Proprietà universale dei gruppi liberi</u>

$\{G_\alpha\}$ famiglia di gruppi

sia G prodotto libero dei G_α

(cioè ho G gruppo + $i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G$ tc G è prodotto libero interno degli $i_\alpha(G_\alpha)$)

Allora $\forall$ famiglia di omomorfismi

$$\varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H, \quad H \text{ gruppo,}$$

$\exists$ un omomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tale che $\varphi \circ i_\alpha = \varphi_\alpha \quad \forall \alpha \in A$ (*)

Conseguenza:

TEO <u>Unicità dei prodotti liberi</u>

Sia $\{G_\alpha\}$ famiglia di gruppi, e siano

$i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G$ tc G prod. lib. di $i_\alpha(G_\alpha)$

$i'_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G'$ tc G' " " " $i'_\alpha(G_\alpha)$

posso sostituire l'ipotesi che valga (*) per G e G' !

Allora $\underline{\underline{\exists!}}$ $\phi : G \to G'$ isomorfismo tale che

$$\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha \quad \forall \alpha \in A$$

<u>Notaz</u>: Dunque, nella def. di prodotto libero, gli i_α sono contenuti. Ma questa unicità a meno di unico isomorfismo ci permette di "dimenticarcene"

Ora vediamo che la proprietà universale caratterizza i prodotti liberi:

TEO Sia $\{G_\alpha\}$ famiglia di gruppi

Sia G gruppo e $i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$ famiglia di omomorfismi tali che vale $(*)$

Allora gli i_α sono iniettivi e G è il prodotto libero dei $i_\alpha(G_\alpha)$.

dim, (si tratterà di scegliere opportunamente i φ_α in $(*)$)

→ Dimostriamo che gli i_α sono necessariamente iniettivi - Fisso $\bar\alpha \in A$. Prendo $H := G_{\bar\alpha}$

e come $\varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$:

$$\varphi_{\bar\alpha} = \mathrm{id}_{G_{\bar\alpha}}, \quad \varphi_\alpha = 0 \text{ per } \alpha \neq \bar\alpha$$

Allora per $(*)$ $\exists$ $\varphi : G \longrightarrow H$ che estende i φ_α : in particolare

$$\varphi \circ i_{\bar\alpha} = \varphi_{\bar\alpha} = \mathrm{id}_{G_{\bar\alpha}}$$

$\Rightarrow$ $i_{\bar\alpha}$ è iniettivo.

→ Ora usiamo l'esistenza: $\exists\, G'$ gruppo e famiglia di omomorfismi $i'_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow G'$ tali che G' è il prodotto libero dei $i'_\alpha(G_\alpha)$

Allora per il teorema precedente $\exists\, \phi : G \to G'$ isomorfismo tc $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha \ \forall \alpha$

Dunque G è prodotto libero dei $i_\alpha(G_\alpha)$ come volevamo

$\boxtimes$

<u>OSS</u>

Questa proprietà è importante dal pdv teorico (ovviamente) ma anche pratico: capita di trovare un gruppo che soddisfa (*) e dunque sapere la sua struttura. Questo è il modo in cui si dimostra van Kampen (ad esempio quando l'intersezione dei due aperti è semplicemente connessa viene proprio un prodotto libero).

<u>COR</u> Se $G = G_1 * G_2$

e G_1 è prodotto libero di $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$

e G_2 " " " " $\{H_\beta\}_{\beta \in B}$

(e $A \cap B = \emptyset$ ovviamente)

allora G è il prodotto libero

degli $\{H_\gamma\}_{\gamma \in A \cup B}$

<u>dim</u>: per esercizio

Teo (Teo 68.7 di Munkres)

Sia $G = G_1 * G_2$ Siano $N_i \triangleleft G$ $i = 1, 2$

sia N : sottogruppo normale generato da N_1 e N_2

Allora
$$G/N \cong G_1/N_1 * G_2/N_2$$

dim: considero

$$\begin{tikzcd}
\varphi_i : G_i \arrow[r] \arrow[dr, "\pi_i"'] & G_1 * G_2 \arrow[r] & G/N \\
& G_i/N_i \arrow[ur, "J_i"'] &
\end{tikzcd}$$

vediamo che

G/N soddisfa la proprietà universale

rispetto a $J_i : G_i/N_i \longrightarrow G/N$

Sia dunque H gruppo e

$$h_i : G_i/N_i \longrightarrow H$$

omomorfismi:

componendo con π_i ho $G_i \xrightarrow{\pi_i \circ h_i} H$

$\rightsquigarrow$ per proprietà universale

$$G_1 * G_2 \xrightarrow{\psi} H$$

se prendo

$$\begin{tikzcd}
N_i \subseteq G_1 \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[rrr, bend right=40, "1"'] & G_1 * G_2 \arrow[r, "\psi"] & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[rr, bend right, "\pi_i \circ h_i"'] & G_1 * G_2 & H
\end{tikzcd}$$

Allora $\left.\begin{array}{l} N_1 \subseteq \ker \psi \\ N_2 \subseteq \ker \psi \end{array}\right\}$ e ovviamente il ker è normale

$$\Downarrow$$

$$N \subseteq \ker \psi$$

Allora ho

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_1 * G_2 \arrow[r] & {} \\
G/N \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

← per propr. universale $\exists\, h$ omom che fa commutare il diagramma.

Ma allora per i risultati precedenti ci siamo!

$\boxtimes$

GRUPPI LIBERI

Sia G un gruppo $\{g_\alpha\}$ famiglia di elementi di G

def supponiamo che $\{g_\alpha\}$ sia una famiglia di generatori per G, ciascuno dei quali ha ordine infinito.
Se G è il prodotto libero dei $G_\alpha = \langle g_\alpha \rangle (\cong \mathbb{Z})$ allora G si dice gruppo libero sull'insieme $\{g_\alpha\}$ ← insieme di generatori liberi per G

Dunque ogni elemento di G si scrive in modo unico come una parola ridotta nei g_α

Proprietà universale dei gruppi liberi

(Basta riscrivere quella dei prodotti liberi)

Gruppi liberi su insiemi :

S insieme qualsiasi (tale che nessun suo elemento sia una parola in altri elementi di S)

$\forall\, s \in S$ definisco $G_s := \{ s^n,\ n \in \mathbb{Z} \}$

e mettiamoci la struttura di gruppo (abeliano) $(s^n)(s^k) := s^{n+k}$

il prodotto libero dei G_s
si chiama <u>gruppo libero</u> su S
spesso lo indichiamo col simbolo F_S

<u>oss</u>

1) se $S = \{s\}$ $\quad F_S \cong \mathbb{Z}$

2) se $S = \{a, b\}$ $\quad F_S = \{$ parole ridotte in a e b $\}$

non è commutativo! $ab \neq ba$

3) Dimostrare che se $|S| \geq 2$ F_S non è mai commutativo.

4)
Se considero il gruppo dei commutatori

$$F_S' = \langle ghg^{-1}h^{-1} \quad g, h \in F_S \rangle$$

vale che

$$F_S / F_S' \cong \text{gruppo abeliano libero su } S \text{ generatori}$$

(fate le verifiche del caso)
teo 69.4 Munkres

<u>COR</u> Dato G gruppo libero su $n \in \mathbb{N}$ generatori, ogni famiglia di generatori liberi per G possiede n elementi

<u>dim</u> per esercizio

<u>def</u> la cardinalità di un insieme di generatori liberi per un gruppo libero si chiama <u>rango del gruppo</u>.

Il rango di gruppi liberi ha proprietà sorprendenti e inaspettate, che mostrano quanto sia diverso dal rango dei gruppi <u>abeliani</u> liberi:

Ecco alcuni risultati, di cui c'è una dimostrazione <u>topologica</u>, che usa i rivestimenti e i grafi sul Munkres,

Per una dimostrazione algebrica, si veda, ad esempio, Machì, "una introduzione a idee e metodi della teoria dei gruppi"

o anche Articolo del 2010 di B. Steinberg "An elementary proof that subgroups of free groups are free"

Teo (Nielsen - Schreier)

ogni sottogruppo di un gruppo libero è libero

Teo Sia F libero di rango r e $H < F$

con indice finito $= J$

Allora H ha rango $\boxed{1+(r-1)J}$

Esempi

$N(a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1}) < F(a,b)$

ha indice 4 (e dunque rango $1+(2-1)4 = 5$)

ecco cinque generatori liberi (dimostrarlo)

$a^2 \quad b^2 \quad b^{-1}a^{-1}ba \quad aba^{-1}b^{-1} \quad ab^2a^{-1}$

Teo Se $F = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ il derivato F' ha rango infinito

OSS 1) è chiaro che il problema sta lì: quando quoziento per il derivato ho gruppi abeliani liberi dove il rango si comporta come una dimensione: se $G' \subseteq G \Rightarrow rkG' \leq rkG$.

2) Dunque il gruppo libero di rango 2 contiene sottogruppi liberi di qualunque rango finito o numerabile.

Teorema di Seifert-van Kampen

X spazio topologico

U, V aperti cpa in X

tali che $X = U \cup V$ e $U \cap V$ è cpa.
$\neq \emptyset$

Sia $x_0 \in U \cap V$

Abbiamo il diagramma di inclusione

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, hook, "i_U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, hook, "j_U"] \arrow[dr, hook, "j_V"'] & & X \\ & V \arrow[ur, hook, "i_V"'] & \end{tikzcd}$$

che induce il diagramma di omomorfismi:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U, x_0) \arrow[dr, "i_{U*}"] & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "j_{U*}"] \arrow[dr, "j_{V*}"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(V, x_0) \arrow[ur, "i_{V*}"'] & \end{tikzcd}$$

quello che vediamo è che $\pi_1(X, x_0)$ è il pushout di questo diagramma.

ovvero (2 modi per descriverlo)

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{N}$$

N = sottogruppo normale generato da ~~$j_{U*} \pi_1(U \cap V$~~
$j_{U*} \alpha \, j_{V*} \alpha^{-1}$ $\quad \alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0)$

2) se $\pi_1(U, x_0) = \langle S', R' \rangle$ $\quad \pi_1(U \cap V, x_0) = \langle B, \ldots$

$\pi_1(V, x_0) = \langle S'', R'' \rangle$

allora $\pi_1(X, x_0) = \langle S' \cup S'', R' \cup R'' \cup R_S \rangle$

dove $R_S = i_{U*}\alpha \, i_{V*}\alpha^{-1}$ $\forall \alpha \in \pi_1(U \cap V, x \ldots$

3) con la proprietà universale

$\forall$ H gruppo + omom di gruppo

$h_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H$

$h_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$

tali che $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$ $\forall$

allora $\exists!$ $h : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$

che fa commutare il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

DIM. Abbiamo già visto in Geo 1 che $\pi_1(X, x_0)$ è generato da

$i_{U*}\pi_1(U, x_0)$ e $i_{V*}\pi_1(V, x_0)$

cioè che posso definire h

Rivediamola velocemente:
(ma dovete rivederla voi)

$\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

$\exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ partizione di $[0,1]$ tale che $\forall i = 0, \dots, k-1 \quad \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$ oppure V

e $\forall i = 0, \dots, k \quad \alpha(t_i) \in U \cap V$

Rivederlo

allora dati $\alpha_i : I \longrightarrow U$ o V cammini riparametrizzati

$$\gamma_i = i_{U*} \circ \alpha_i$$
oppure $i_V \circ \alpha_i$

$$\alpha \sim \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_k$$

Allora andando ad h abbiamo che possiamo definire

$$h([\alpha]) = h_1(\gamma_1)\, h_2(\gamma_2)\, h_1(\gamma_3) \dots$$

eccetera

e questa definizione è forzata
(unicità di h)

<u>Ma</u> il problema è che sia una
buona definizione

STEP 4 Dimostriamo la condizione (1) per τ

cioè: (1) se $[f]=[g] \Rightarrow \tau(f)=\tau(g)$

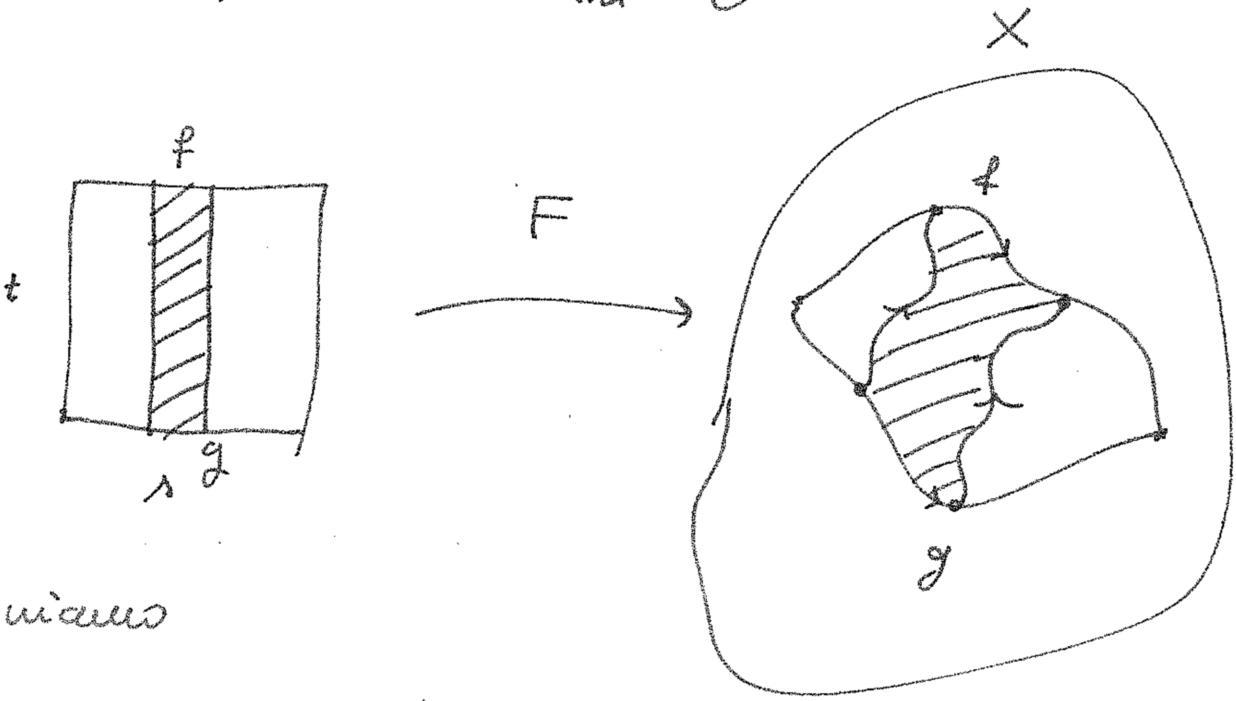
Sia $F: I\times I \longrightarrow X$ omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra f e g

(i) Caso speciale

Supponiamo che $\exists\, 0=s_0<s_1<\dots<s_n=1$

tali che se chiamo $R_i := [s_{i-1}, s_i]\times I$

$F(R_i) \subseteq U$ o in V



Definiamo

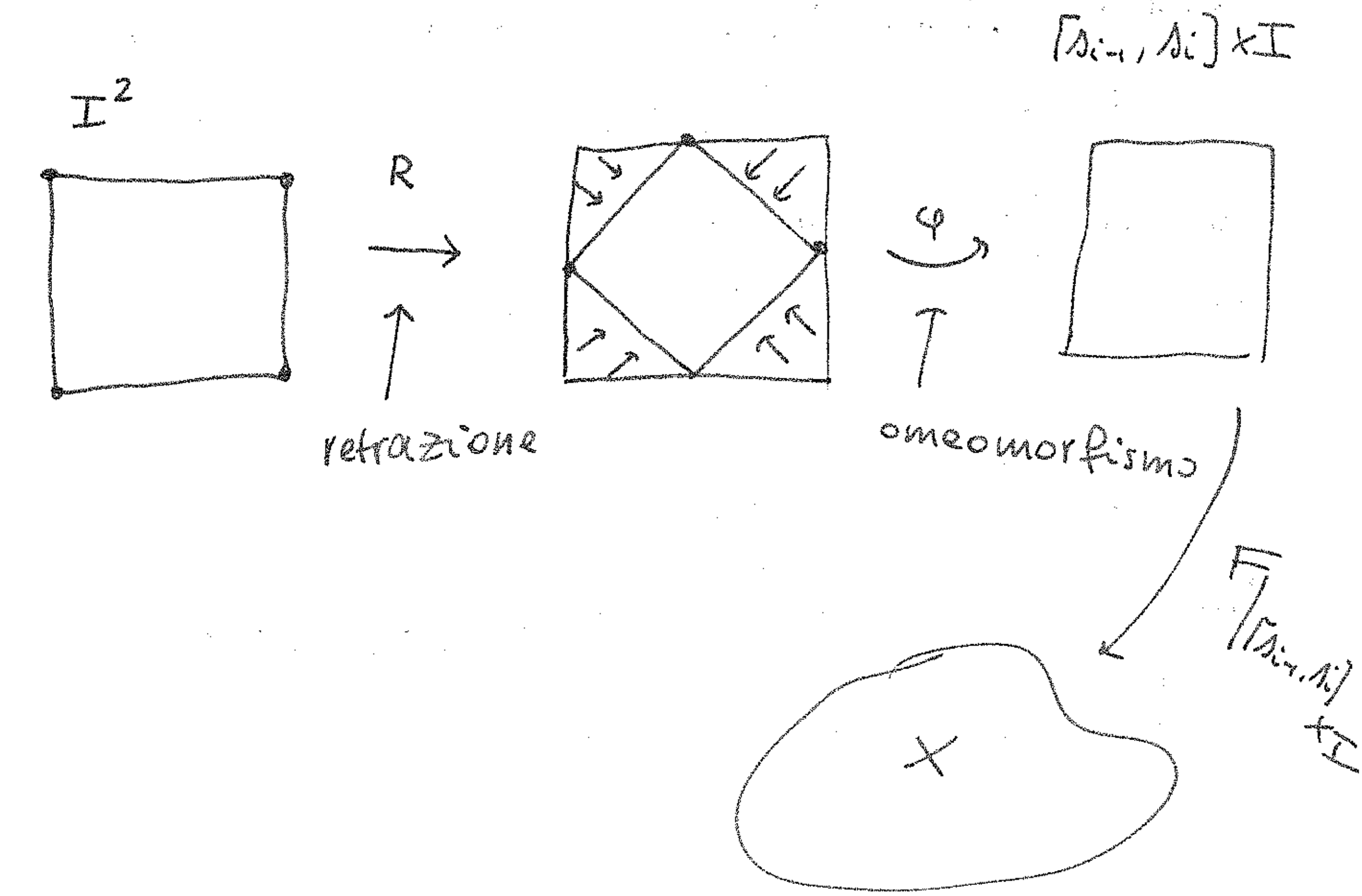
$\beta_i(t) := F(s_i, t)$

β_i è cammino in X tra $f(s_i)$ e $g(s_i)$ (vedi figura)

$\beta_0 = \varepsilon_{f(0)} = \varepsilon_{g(0)}$

$\beta_1 = \varepsilon_{f(1)} = \varepsilon_{g(1)}$

osserviamo che



prendendo questa composizione otteniamo una equivalenza di cammini:

$$f_i * \beta_i \sim \beta_{i-1} * g_i \quad (*)$$

$\forall\, i = 1, \dots, n$

e questa equivalenza non è solo in X ma in U o in V

Da questo deriva che $\forall i$

$$\tau(f_i * \beta_i) = \sigma(f_i * \beta_i) = \sigma(f_i)\sigma(\beta_i) = \tau(f_i)\tau(\beta_i)$$

$\| \rightarrow$ per ⊛

$$\sigma(\beta_{i-1} * g_i) = \sigma(\beta_{i-1})\sigma(g_i) = \tau(\beta_{i-1})\tau(g_i)$$

quindi $\nearrow$ con notazioni precedenti $f_i : I \to X$ riparametrizz. di $f|[s_{i-1}, s_i]$

$$\tau(f) = \sigma(f_1)\,\sigma(f_2)\ldots\sigma(f_n) =$$

$$= \underbrace{\sigma(\beta_0)}_{\varepsilon_{f(0)}}\sigma(g_1)\sigma(\beta_1)^{-1}\sigma(\beta_1)\,\sigma(g_2)\,\sigma(\beta_2)^{-1}\ldots$$

$$\ldots\sigma(\beta_{n-1})\,\sigma(g_n)\,\underbrace{\sigma(\beta_n)^{-1}}_{\varepsilon_{g(1)}} =$$

$$= \sigma(g_1)\,\sigma(g_2)\ldots\sigma(g_n) \quad \boxed{CVD}$$

Qui abbiamo usato l'ipotesi aggiuntiva.

Ma

Per il lemma del numero di Lebesgue

ho che:

$\exists\ 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$

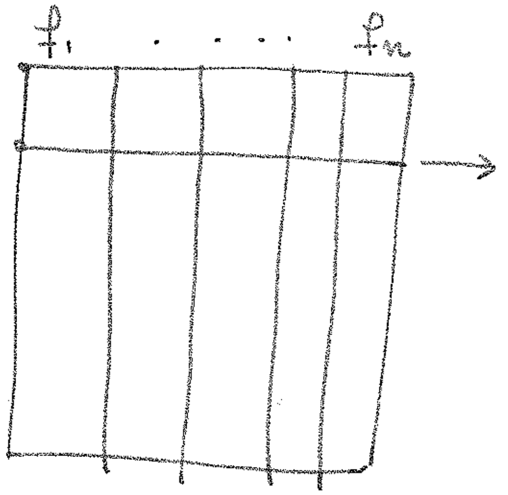
ed $\exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$

tali che

$\forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m$

$$F\left([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j] \right) \subseteq \begin{matrix} U_0 \\ V \end{matrix}$$

se ora considero



$\varphi_i^0 = f_i$

$\varphi_1^1, \dots \varphi_n$

$\varphi_i^n = g_i$

f_i e φ sono nelle condizioni precedenti - Dunque

$$\tau(f) = \tau(f_1) \dots \tau(f_n) =$$

$$= \tau(\varphi_1^1) \dots \tau(\varphi_n^1) = \dots$$

... dopo # finito di passaggi $\tau(g_1) \dots \tau(g_n)$

$= \tau(g)$ ok!

STEP 5 :

Dimostriamo che τ soddisfa (2)

(2) : se f e g sono compatibili,

$$\tau(f * g) = \tau(f)\ \tau(g)$$

prendo una suddivisione di $[0, 1]$ che soddisfa $\quad 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m$

$$1/2 \in \{s_i\}$$

e tale che $f * g([s_{i-1}, s_i]) \subseteq \begin{matrix} U_\alpha \\ V \end{matrix}$

(che esiste per teorema su n° Lebesgue)

Basta osservare che allora

$$(f * g) \sim f_1 * f_2$$

$$\tau(f * g) = \underbrace{\sigma(f_1)\,\sigma(f_2)\cdots\sigma(f_k)}_{\tau(f)}\,\underbrace{\sigma(g_1)\cdots\sigma(g_{n-k})}_{\tau(g)}$$

STEP 6

Abbiamo dunque

$\forall \alpha$ laccio con punto base x_0

ben definito

$$\Phi([\alpha]) := \tau(\alpha)$$

e per tutte le proprietà dimostrate nei passi precedenti, Φ è l'omomorfismo che cercavamo!

Esercizi importanti (seguendo Munkres)

1) Bouquet di n circonferenze: definizione e verifica che $\pi_1(B_n) \cong F_n$

2) Bouquet di A circonferenze: definizione e verifica che $\pi_1(X_A) \cong F_A$

3) "orecchino infinito": definizione e verifica che non è il bouquet di $\mathbb{N}$ circonferenze. verifica che il gruppo fondamentale non è generato dai lacci che generano quelli delle le circonferenze.