Per quanto segue seguiamo molto il Kosniowski

+ Massey, A basic course in Algebraic Topology

PANORAMICA sulla classificazione delle superfici compatte e connesse

def varietà topologiche

$n \in \mathbb{N}^+$ una varietà n-dimensionale

spazio topologico T2 a base numerabile (2-num)

nel Kosniowski non lo chiede ma serve

tale che ogni punto $p \in X$

ha un intorno omeomorfo

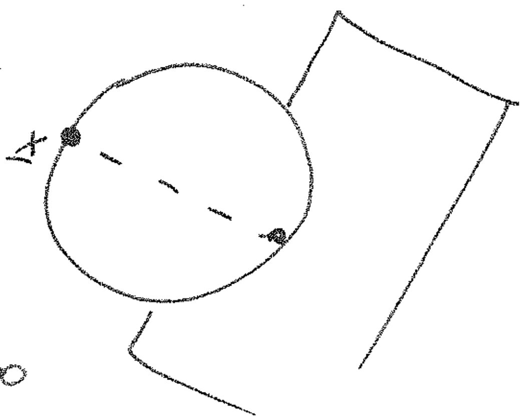
a $\mathring{D}^n = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| < 1 \}$

esempi

1) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $V \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto sono varietà topologiche di dim n e $2n$ rispettivamente.

2) $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è varietà topologica di dim. n $\forall\, \underline{x} \in S^n$

se prendo H piano per $-\underline{x}$ perpendicolare a $\underline{x}$



$U := S^n \setminus H$ è intorno aperto

di $\underline{x}$ $U = S^n \setminus \{-\underline{x}\}$

e $U \underset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{R}^n$ (proiezione stereografica)

3) ogni aperto di una varietà di dim n è una varietà di dim n (a loro)

4) $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ è una varietà di dimensione 2

Dimostriamolo: $\underline{\text{è } T2}$ → (per esercizio)
$\underline{\text{è a base numerabile}}$ ↗

vediamo la proprietà che ogni punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ (o $\mathring{D}^2$)

$\mathbb{P}^2 = S^2/\sim$ Dato $p \in \mathbb{P}^2$ $p = [(x_1, x_2, x_3)]$

se prendo i perpiano per $(0,0,0)$ $\perp$ a (x_1, x_1, x_3) in $\mathbb{R}^3$ Osservo che $\mathbb{P}^2 \setminus \overline{H} \sim$ calotta aperta $\overset{2}{\sim} \mathring{D}^2$

e $\overline{H}$ la sua immagine in $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$

p

Questo discorso si può fare per piani proiettivi di qualunque dimensione

$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è varietà di dimensione n

$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ " " " " $2n$

6) G gruppo finito che agisce (*) liberamente su X varietà compatta di dim n

Allora X/G è una varietà compatta di dim. n.

(*) Richiamo: Azioni libere:

se $g \in G$ ha un punto fisso $\Rightarrow g = id_X$

equivalentemente:

$\forall g \in G \setminus \{id\}$ l'azione di g su X non ha punti fissi

equivalentemente:

$\forall x \in X \quad stab(x) = \{ g \in G \text{ tc } g \cdot x = x \} = \{ id \}$

Ricordiamo che $\pi : X \to X/G$ è aperta

(qualunque azione di gruppo induce mappa quoziente aperta)

e inoltre, essendo G finito, π è anche chiusa.

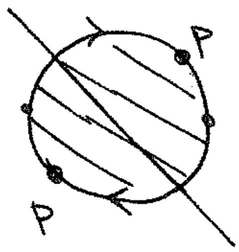
Sia $p = [x] \in X/G$

$\pi^{-1}(p) = \{ x_1 \dots x_n \}$ con $x_i = g_i x \quad G = \{ g_i \}$

$n = \# G$

(sono tutti distinti perché se fosse $gx = hx \Rightarrow g^{-1}hx = x \underset{\text{az. libera}}{\Rightarrow} g = h$)

Esplicitamente se considero $\mathbb{RP}^2$ come



disco col bordo identificato come in figura

l'iperpiano corrisponde a una retta per il centro del disco

<u>OSS</u> le tre condizioni nella definizione di varietà sono <u>indipendenti</u>: nessuna di loro è implicata dalle altre due.

<u>Controesempi negli esercizi</u>

5) Il prodotto di due varietà di dimensione n ed m rispettivamente è una varietà $(n+m)$-dimensionale. (per esercizio)

Dimostriamo il seguente $\boxed{\text{fatto}}$

$\forall [x] \in X/G \quad \exists\, \mathcal{U} \ni [x]$ aperto in X/G

ed $\exists\, \mathcal{V} \ni x$ aperto in X tale che

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{g \in G} g(\mathcal{V})$$

e $\pi|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ è un omeomorfismo

(questa proprietà si chiamerà: azione propriamente di discontinua)

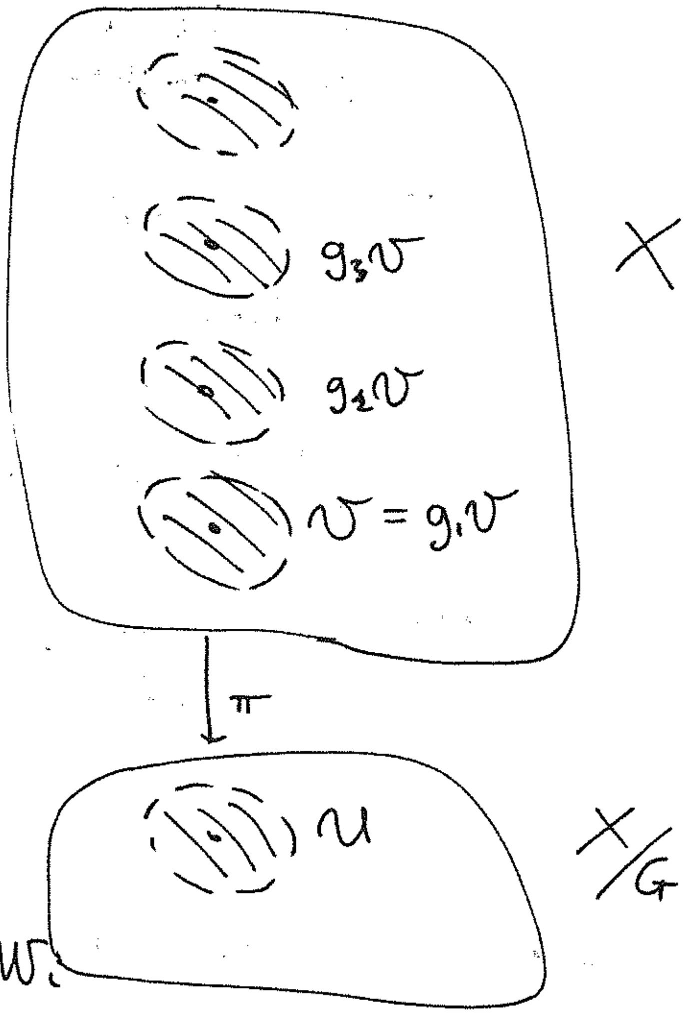
prendo $\forall i = 1, \dots, n$

V_i intorno aperto di x e

W_i intorno aperto di $g_i x$

tali che $V_i \cap W_i = \phi$

(usando il fatto che X è T2)



ora prendo

$$\mathcal{V} := \bigcap_{i=1}^{n} V_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} W_i$$
$$\ni x$$

allora $\mathcal{U}$ è un intorno aperto di x

e se prendo

$$\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V})) = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \mathcal{V}$$

questo è sempre vero
per una azione di gruppo!

ma vale anche che questa unione è
disgiunta:

infatti
osserviamo

$$g_i \mathcal{V} \cap g_T \mathcal{V} \neq \phi$$

sse

$$g_T^{-1} g_i \mathcal{V} \cap \mathcal{V} \neq \phi$$

ma

$$g_T^{-1} g_i \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_i$$

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_i$$

e questi due hanno $\cap$ vuota!

ora basta osservare che

$$\pi|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \pi(\mathcal{V})$$

è 1-1 ed aperta $\Rightarrow$ è un omeomorfismo!

Dunque

1) è chiaro che ogni punto di X/G ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ perché ~~p~~ π è un omeomorfismo locale.

2) Vediamo che X/G è T2:

siano $p, q \in X/G$ $p \neq q$

prendo $x \in \pi^{-1}(p)$ $y \in \pi^{-1}(q)$

prendo $\forall\, i = 1..n$

V_i intorno aperto di x

W_i intorno aperto di $g_i y$

tali che $V_i \cap W_i$ (usando che X è T2)

ora se prendo

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_i \quad \to \text{intorno aperto di } x$$

$$W := \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} W_i \quad \to \text{intorno aperto di } y$$

e $\pi(V)$ $\pi(W)$ sono intorni aperti di p e q. Sono disgiunti: deriva dal fatto che

$$\forall\, i = 1.., n \qquad V \cap g_i W = \phi$$

come prima.

3) Sia $\mathcal{B}$ base numerabile di X

$\{ \pi(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$ è una base (numerabile) di X/G

per esercizio!

OSS Vale anche questo interessante risultato (Ref Manetti 6.5) [che si può usare per il punto (3)]

X, Y spazi topologici

$f: X \to Y$ continua chiusa e suriettiva

tale che $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ sia compatto

Se X è a base numerabile, allora X/G è a base numerabile. Per esercizio

Hint: Data $\mathcal{B}$ base di X, sia

$\mathcal{F} := \{ A \text{ unione finita di elementi di } \mathcal{B} \}$

Dimostrare che

$f(\mathcal{F}) := \{ \cancel{X} \setminus f(X \setminus A) \quad \forall A \in \mathcal{F} \}$

è una base per Y

<u>def</u> Dato X spazio topologico e G gruppo che agisce su X si dice che l'azione di G è propriamente discontinua se

$$\forall x \in X \quad \exists\, \mathcal{V}_x \text{ aperto tc}$$

$$g(\mathcal{V}) \cap g'(\mathcal{V}) = \phi \quad \forall\, g \neq g'$$

<u>OSS.</u>

1) è sufficiente chiedere che

$$g\mathcal{V} \cap \mathcal{V} \neq \phi \quad \forall\, g \neq e$$

(se $g, g' \in G$ tc $g \neq g' \Rightarrow \quad g\mathcal{V} \cap g'\mathcal{V} = gg^{-1}(g\mathcal{V} \cap g'\mathcal{V})$
$= g\,(\mathcal{V} \cap g^{-1}g'\mathcal{V})\,)$

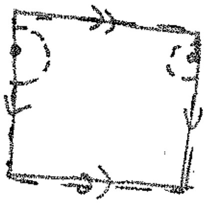
2) Propriamente discontinua $\Rightarrow$ libera

3) L'esercizio di prima dice che l'azione libera di un gruppo finito su uno spazio compatto è propriamente discontinua. (infatti il fatto che X fosse una varietà non serve)

4) Se X è una varietà di dim n e G un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su X. Allora X/G è una varietà di dimensione n.

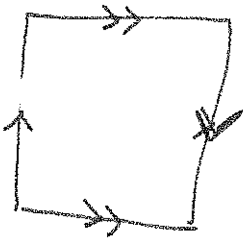
(Per esercizio)

7) Il Toro è una superficie topologica



o come $S^1 \times S^1$

8)



è una superficie topologica? Sì, si chiama bottiglia di Klein.
Disegnino.

ES. se considero la seguente azione

Considero

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to (x+1, y)$$

ES. per loro è azione PD

$$h: (x,y) \mapsto (-x, y+1)$$

omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$

$$G = \langle g, h \rangle \subseteq \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$$

• $G \cong \langle a, b \mid bab^{-1}a \rangle$ $\quad b \leftrightarrow h$, $a \leftrightarrow g$

$$hgh^{-1}g(x,y) =$$
$$= hgh^{-1}(x+1, y) =$$
$$= hg(-x-1, y-1) =$$
$$= h(-x, y) = (x,y)$$

$$(x,y) = ghg^{-1}(-x, y+1) =$$
$$= gh(-x-1, y+1) =$$
$$= g(x+1, y+2)$$

- $K \cong \mathbb{R}^2/G$

def <u>somma connessa di superfici:</u>

(<u>Ref</u> Kosniowski) S_1, S_2 superfici

$D_1 \subset S_1 \qquad D_2 \subset S_2$

con $D_1 \overset{h_1}{\sim} D^2 \overset{h_2}{\sim} D_1$

disco CHIUSO

h_i omeomorfismi

(ovviamente esistono)

considero

$$S_1 \# S_2 = S_1 \setminus \mathring{D}_1 \bigcup_{h_1|\partial D_1,\ h_2|\partial D_2} S_2 \setminus \mathring{D}_1 =$$

$$= \frac{\left(S_1 \setminus \mathring{D}_1\right) \sqcup \left(S_2 \cup \mathring{D}_2\right)}{\sim}$$

$x \sim y$ sse $x = y$

oppure $x \in \partial(S_1 \setminus \mathring{D}_1)$

$y \in \partial(S_2 \setminus \mathring{D}_2)$

e $h_1(x) = h_2(y)$

o viceversa.

<u>FATTO</u> (che non dimostriamo ma che si può dimostrare rigorosamente)

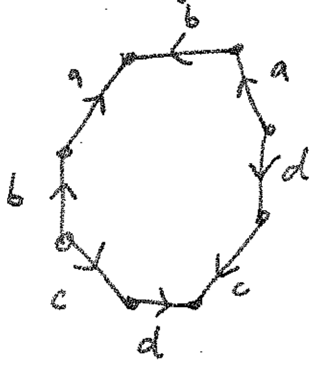
che la classe di omotopia di $S_1 \# S_2$ non dipende dalla scelta dei dischetti D_1 e D_2

<u>ES.</u>

1) se $S_2 \sim S^2$ 2-sfera

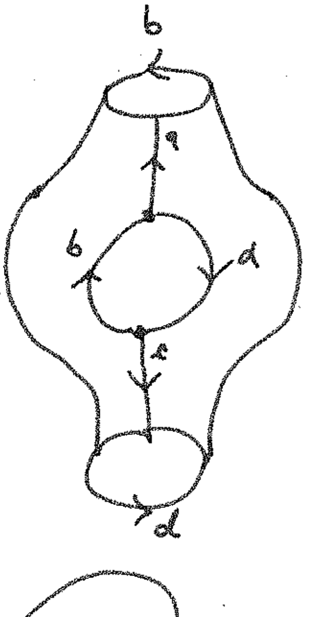
allora $S_1 \# S_2 \sim S_1$

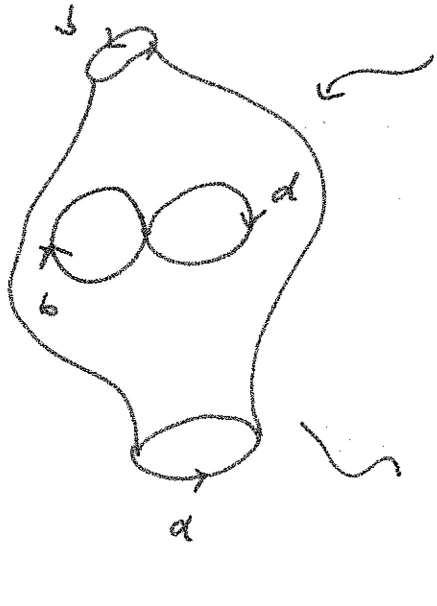
2) <u>Esercizio</u>: consideriamo la seguente figura



- è una superficie topologica dimostriamolo "visivamente"
- è omeomorfa a $T \# T$

dim visiva:

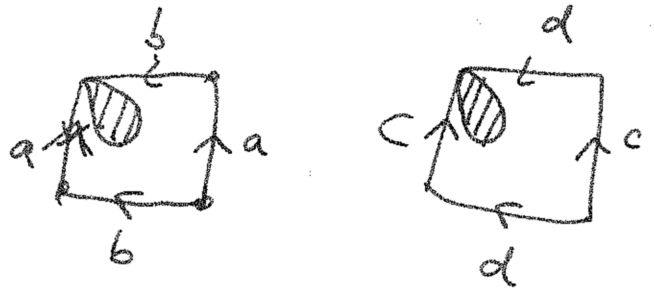




$\sim$

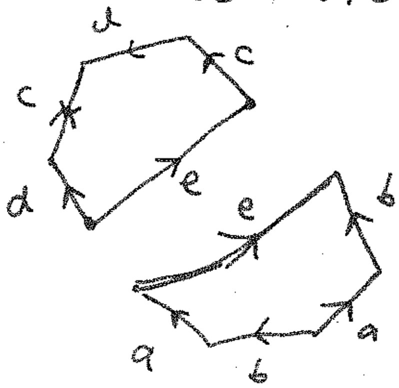
$\sim$

Altra dimostrazione più esplicita: partiamo dalla somma connessa



prendo in modo opportuno i dischi:

allora vediamo che quando rimuovo e incollo è lo stesso che fare



e questo è proprio lo spazio da cui sono partita ▷

---

3) $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \rightsquigarrow K$ bottiglia di Klein

OSS: le classi di omeomorfismo delle superfici compatte connesse con questa operazione formano un semigruppo (cioè una)

(tutti gli assiomi di gruppo
+ tranne l'inverso –

Teorema di classificazione delle superfici connesse e compatte

Ogni superficie topologica connessa e compatta è omeomorfa a una e una sola di queste superfici:

$$S \# \underbrace{T \# \cdots \# T}_{g \text{ volte}} \qquad g \in \mathbb{N} \ \{0, 1, \dots\}$$

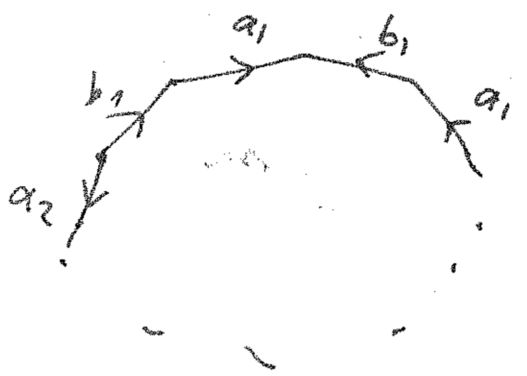
$$\underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{m \text{ volte}} \qquad m \in \mathbb{N}^{>0} \ \{1, \dots$$

le superfici omeomorfe alla prima serie si dicono orientabili, e g si chiama il loro genere. Quelle nella seconda lista si dicono non orientabili.

Fatto:

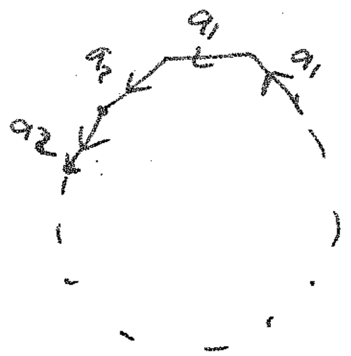
$$S \# \underbrace{T \# \cdots \# T}_{g \text{ volte}}$$

è omeomorfo al poligono con $4g$ lati a_i, b_i e identificazioni



$\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$

al poligono con $2m$ lati e identificazioni



$P_{2m}/\sim$

unico passaggio che descriviamo: queste superfici così definite non sono a due a due omeomorfe:

$$Ab(\pi_1(P_{4g}/\sim)) \underset{\text{seifert van kampen}}{\cong}$$

$$\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} \rangle$$

+ tutti gli altri commutatori

$$\cong \underline{\mathbb{Z}^{2g}}$$

$$Ab(\pi_1(P_{2m}/\sim)) \cong \langle a_1, \dots, a_m \mid \prod a_i^2, + \text{commutatori} \rangle \cong$$

$$\cong \quad \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}/2$$

questa dimostrazione <u>vediamola</u>

Per dimostrare l'isomorfismo, possiamo ragionare così:

$$\mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle b_1, \dots, b_m \mid \text{commutatori dei } b_i ,\ b_m^2 \rangle$$

ora considero questo semplice isomorfismo

$$F(a_1 \dots a_m) \xrightarrow{\sim} F(b_1 \dots b_m)$$

$$a_1 \longmapsto b_1$$

voglio $b_m = \prod_{i=1}^{m} a_i$

$$\vdots$$

$$a_{m-1} \longmapsto b_{m-1}$$

$$a_m \longmapsto b_{m-1}^{-1} b_{m-2}^{-1} \dots b_1^{-1} a_m$$

è un isomorfismo perché ha <u>inverso</u>:

$$b_1 \longmapsto a_1$$

$$b_2 \longmapsto a_1$$

$$\vdots$$

$$b_{m-1} \longmapsto a_{m-1}$$

$$b_m \longmapsto \prod_{i=1}^{m} a_i$$

Dunque ora basta osservare che

$$\pi_1\left(P_{em}/_{\sim}, x_0 \right) \cong \langle a_1 \dots a_m \mid \text{commutatori}, \textstyle\prod a_i^2 \rangle$$

$$\cong \langle b_1 \dots b_m \mid \text{commutatori}, b_m^2 \rangle$$

tramite l'isomorfismo appena descritto

$$\cong \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Fine